Confluence and unfolding of irregular singularities of hypergeometric equations

大島利雄
Toshio Oshima
城西大学 理学部
Faculty of Science, Josai University

Abstract

For a linear differential equation on $\mathbb{P}^1$ with unramified irregular singular points we examine its realization as a confluence of singularities of a Fuchsian differential equation having the same index of rigidity, which we call an unfolding of the equation with irregular singularities. We conjecture that this is always possible. For example, if the equation is rigid, this is true and the unfolding helps us to study the original equation.

1 Gauss の超幾何関数

Gauss の超幾何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k k!}x^k$ は，0, 1, ∞ の 3 点を確定特異点とする 2 階の超幾何微分方程式

$$x(1-x)u''+\big(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\big)u'-\alpha\beta u=0 \qquad (\text{スペクトル型：}11,11,11) \tag{1.1}$$

の解として特徴づけられる．ここで $(a)_k=(a)(a+1)\cdots(a+k-1)$ である．

$y=\beta x$ とおくと，各特異点での特性指数を表した Riemann scheme は

$$\begin{Bmatrix} y=\infty & y=\beta & y=0 & \\ \alpha & 0 & 0 & ;y \\ \beta & \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma & \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

となるが，$\beta\to\infty$ という極限を考えると，2 つの特異点 $y=\beta$ と ∞ は合流して ∞ における不確定特異点となり，Gauss の超幾何関数は

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma;\tfrac{y}{\beta}) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-\frac{yt}{\beta})^{-\beta}dt \\ \xrightarrow{\beta\to\infty} {}_1F_1(\alpha,\gamma;y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!}y^k=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{yt}dt \end{aligned}$$

のように Kummer の関数に収束し，方程式 (1.1) は Kummer の微分方程式

$$y\frac{d^2v}{dy^2}+(\gamma-y)\frac{dv}{dy}-\alpha v=0 \qquad (\text{スペクトル型：}11|11,11) \tag{1.3}$$

に収束する．同様に適当な極限によって Gauss の微分方程式の 3 つの特異点を合流すると，Hermite の微分方程式となる：

$$u'' - xu' + cu = 0 \qquad (\text{スペクトル型：}11|11|11). \tag{1.4}$$

Gauss の超幾何系の場合は，Hermite の微分方程式の**普遍開折**（versal unfolding）

$$(1-t_1x)(1-t_2x)\tilde{u}'' + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 x)\tilde{u}' + \bar{\mu}\big(\bar{\lambda}_2 - t_1t_2(\bar{\mu}+1)\big)\tilde{u} = 0 \tag{1.5}$$

が存在する．$t_1 = 1, y = x - 1$ とおくと，$t_2 = \frac{1}{2}$ あるいは 0 に応じて，Gauss の超幾何微分方程式，あるいは Kummer の微分方程式となり，$t_1 = t_2 = 0$ とおくと, Hermite の微分方程式となる．

$$\left\{\begin{matrix} x=\infty & x=\frac{1}{t_1} & x=\frac{1}{t_2} \\ \bar{\mu} & 0 & 0 \\ \frac{\bar{\lambda}_2}{t_1t_2}-\bar{\mu}-1 & \frac{\bar{\lambda}_2+t_1\bar{\lambda}_1}{t_1(t_1-t_2)}+1 & \frac{\bar{\lambda}_2+t_2\bar{\lambda}_1}{t_2(t_2-t_1)}+1 \end{matrix}\right\} \qquad \big(t_1t_2(t_1-t_2)\neq 0\big),$$

$$\left\{\begin{matrix} x=\infty & (1) & x=\frac{1}{t_1} \\ \bar{\mu} & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{\lambda}_2}{t_1^2}-\frac{\bar{\lambda}_1}{t_1}-\bar{\mu} & -\frac{\bar{\lambda}_2}{t_1} & \frac{\bar{\lambda}_2}{t_1^2}+\frac{\bar{\lambda}_1}{t_1}+1 \end{matrix}\right\} \qquad (t_1\neq 0,\ t_2=0),$$

$$\left\{\begin{matrix} x=\infty & x=\frac{1}{t_1} & (1) \\ \bar{\mu} & 0 & \\ \frac{\bar{\lambda}_2}{t_1^2}-\bar{\mu}-1 & -\frac{\bar{\lambda}_2}{t_1^2}+2 & \frac{\bar{\lambda}_2}{t_1}+\bar{\lambda}_1 \end{matrix}\right\} \qquad (t_1=t_2\neq 0),$$

$$\left\{\begin{matrix} x=\infty \\ \bar{\mu} \\ 1-\bar{\mu}+\bar{\lambda}_1x+\bar{\lambda}_2x^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} x=\infty & (1) & (2) \\ \bar{\mu} & 0 & 0 \\ 1-\bar{\mu} & \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2 \end{matrix}\right\} \qquad (t_1=t_2=0).$$

なお，上の $t_1 = t_2 = 0$ のときの Riemann scheme は, $x \to +\infty$ のときに

$$u_1(x) \sim x^{-\bar{\mu}}, \quad u_2(x) \sim x^{\bar{\mu}-1}e^{-\bar{\lambda}_1 x - \frac{\bar{\lambda}_2}{2}x^2} \tag{1.6}$$

という漸近展開を持つ解（あるいは形式解）$u_1(x)$, $u_2(x)$ が存在することを意味する．

自明な方程式に [10] で定義された versal addition と middle convolution を施すことによってこの普遍開折が得られるので，(1.5) の解の積分表示も分かる：

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{t_1}}^{x} \exp\Big(-\int_0^t \Big(\frac{\lambda_1'}{1-t_1s} + \frac{\lambda_2's}{(1-t_1s)(1-t_2s)}\Big)ds\Big)\big(t-x\big)^{\mu'-1}dt \\ &\qquad\qquad \big(\lambda_2' = \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1t_2 - (t_1-t_2)t_2\bar{\mu},\ \ \mu' = 1-\bar{\mu}\big). \end{aligned} \tag{1.7}$$

この節で述べたことの一般化をこのノートで解説する（背景を含め，一般的には [11] を参照）．

2 Confluence and unfolding

以下の方程式は $\mathbb{P}^1$ 上で確定特異点と不分岐特異点のみをもつ線型常微分方程式とする．

$$Pu = 0 \tag{2.1}$$

特異点を複素パラメータに持つ Fuchs 型の微分方程式 $\tilde{P}\tilde{u}=0$ で，いくつかの特異点の合流が元の方程式を与えているとき，$\tilde{P}$ を P の**開折**（unfolding）と呼ぶ．不確定特異点の解析は確定特異点より一般に難しく，特異点の合流操作は不確定特異点の解析に役立つことに注意したい．

$$\text{確定特異点} \underset{\text{開折}}{\overset{\text{合流}}{\rightleftarrows}} \text{不確定特異点}$$

不確定特異点においては，特異点を ∞ とする座標で，独立解は一般には (1.6) のように指数関数で表せる項を含んだ漸近展開で区別できる．その指数関数の中身は一般に $x^{1/q}$ の多項式となるが，この正整数 q が 1 に取れるとき，**不分岐**という．このノートでは，不確定特異点は全て不分岐であると仮定する．この場合に前節で述べたような普遍開折を考察しよう．

全ての特異点が確定特異点である方程式を Fuchs 型方程式というが，各特異点の解の漸近挙動は**特性指数**で定まる．それを表にしたものが Riemann scheme である．特異点での局所モノドロミーはその特性指数でほぼ定まるが，その固有値に重複度がある場合の局所モノドロミーの情報を付加した一般 Riemann scheme（GRS）を考えることができる（[10] で導入）．GRS を定めたとき，対応する既約な方程式 (2.1) は一般には一意とは限らず，GRS では定まらない有限個のパラメータ（**アクセサリー・パラメータ**という）をもち，その個数は GRS から定まる**スペクトル型**から分かる．なお，局所モノドロミーが対角化可能な場合は，スペクトル型 $\mathbf{m}$ とは各特異点での固有値の重複度のデータ（それは，方程式の階数を n とすると，n の分割を各特異点で並べたもの）

$$\mathbf{m}\,:\,n=m_{j,1}+m_{j,2}+\cdots+m_{j,n_j}\quad(j=0,\ldots,p) \tag{2.2}$$

である．そのとき，リジッド指数 idx $\mathbf{m}$ は $2n^2-\sum_{j=0}^{p}\bigl(n^2-\sum_{\nu=1}^{n_j}m_{j,\nu}^2\bigr)$ となり，アクセサリー・パラメータの個数は $1-\frac{1}{2}\operatorname{idx}\mathbf{m}$ となる（cf. [10]）．

不分岐不確定特異点の場合は，特性指数は数から多項式に一般化され，Fuchs 型のときと同様に一般化 Riemann scheme (GRS)（cf. [7, 11, 17]）およびスペクトル型とリジッド指数（cf. [7, 17]）が定義できる．スペクトル型は，各不確定特異点 $x=c_j$ （$j=0,\ldots,p$）における特性指数 $\lambda_{j,\nu}$（$\nu=1,\ldots,n_j$）の重複度データ $m_{j,\nu}^{(0)}=m_{j,\nu}$ のみならず，さらに $r=1,2,\ldots$ に対し r 次未満の低い次数の特性指数の差を無視した重複度 $m_{j,\nu}^{(r)}$ のデータ

$$\mathbf{m}_j^{(r)}:n=m_{j,1}^{(r)}+\cdots+m_{j,n_{j,r}}^{(r)}\quad(r=0,\ldots,R_j,\ \ j=0,\ldots,p)$$

を含めたものとして定義される（R_j は特異点 $x=c_j$ における特性指数の次数の最大値）．

例 2.1. 方程式 (2.1) の GRS が以下で与えられているとする（以下のどちらも同じものを表す）．

$$\begin{Bmatrix} x=\infty & x=0\\ [a_0+a_1x+a_2x^2]_{(2)} & [c_1]_{(2)}\\ b_0+b_1x & c_2\\ c_0+b_1x & c_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x=\infty & (1) & (2) & x=0\\ [a_0]_{(2)} & [a_1]_2 & [a_2]_2 & [c_1]_{(2)}\\ b_0 & [b_1]_2 & [0]_2 & c_2\\ c_0 & & & c_3 \end{Bmatrix}. \tag{2.3}$$

重複があるときは $[\ ]_2$ のように表し，定数項は重複に応じて 1 ずつ増えるので $[\ ]_{(2)}$ と書いている．

(2.3) は方程式 (2.1) が 4 階で漸近展開が以下で示される（8 種の）解が存在することを意味する．

$$
\begin{aligned}
u(x) &\sim x^{-a_0}(1+o(x^{-1}))e^{-a_1x-\frac{1}{2}a_2x^2},\ x^{-a_0-1}e^{-a_1x-\frac{1}{2}a_2x^2} && (x\to+\infty),\\
&\sim x^{-b_0}e^{-b_1x},\ x^{-c_0}e^{-b_1x} && (x\to+\infty),\\
&\sim (1+o(x))x^{c_1},\ x^{c_1+1},\ x^{c_2},\ x^{c_3} && (x\to+0).
\end{aligned}
$$

この方程式のスペクトル型は $211|22|22,211$ と表記され，それは $\mathbf{m}_0^{(0)}|\mathbf{m}_0^{(1)}|\mathbf{m}_0^{(2)},\mathbf{m}_1^{(0)}$ を示す．なお，特性指数の定数項は，Fuchs-Hukuhara の関係式 $2a_0+b_0+c_0+2c_1+c_2+c_3=6$ を満たす．

一般に，リジッド指数は

$$
\operatorname{idx}\mathbf{m}=2n^2-\sum_{j=0}^{p}\sum_{r=0}^{R_j}\Bigl(n^2-\sum_{\nu=1}^{n_{j,r}}\bigl(m_{j,\nu}^{(r)}\bigr)^2\Bigr) \tag{2.4}
$$

で与えられ，Fuchs–Hukuhara の関係式は

$$
\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=1}^{n_j}m_{j,\nu}\lambda_{j,i}(0)=n-\frac{\operatorname{idx}\mathbf{m}}{2} \tag{2.5}
$$

となる（cf. [17]）．たとえば上の例では

$$
\operatorname{idx}(211|22|22,211)=-4.
$$

スペクトル型 $\mathbf{m}$ を持つ方程式 $Pu=0$ のアクセサリー・パラメータの個数は $n-\frac{1}{2}\operatorname{idx}\mathbf{m}$ となる．既約方程式がアクセサリー・パラメータを持たないスペクトル型のときに**リジッド**といい，それは条件 $\operatorname{idx}\mathbf{m}=2$ と同じである．

定義 2.2 (普遍開折)**.** 不分岐不確定特異点と確定特異点のみをもつ微分方程式 $Pu=0$ に対し特異点を正則パラメータとし，同じリジッド指数の Fuchs 型方程式 $\tilde{P}u=0$ で，特異点を合流することによって $Pu=0$ が得られるものをもとの方程式の普遍開折（versal unfolding）という．

注意 2.3. 普遍開折 $\tilde{P}u=0$ の GRS は $Pu=0$ の GRS から具体的に与えられ（cf. §1, [11, 17]），それは本質的に一意に定まる．例 2.1 の GRS の普遍開折は

$$
\begin{Bmatrix}
x=\infty & x=\frac{1}{t_1} & x=\frac{1}{t_2} & x=0\\
[a_0-\frac{a_1}{t_1}+\frac{a_2}{t_1t_2}]_{(2)} & [\frac{a_1}{t_1}+\frac{a_2}{t_1(t_1-t_2)}]_{(2)} & [\frac{a_2}{t_2(t_2-t_1)}]_{(2)} & [c_1]_{(2)}\\
b_0-\frac{b_1}{t_1} & [\frac{b_1}{t_1}]_{(2)} & [0]_{(2)} & c_2\\
c_0-\frac{b_1}{t_1} & & & c_3
\end{Bmatrix}
$$

で，合流は $t_1=t_2=0$ に対応する．

予想 2.4 ([11, 17])**.** 方程式 $Pu=0$ が既約ならば，普遍開折が存在する．

定理 2.5. リジッド指数が -2 以上なら予想は正しい．

$$
\text{（リジッド） Fuchs 型微分方程式}\ \underset{\text{普遍開折}}{\overset{\text{合流}}{\rightleftarrows}}\ \text{（リジッド）不分岐不確定特異点型微分方程式}
$$

3 Versal addition and middle convolution

微分方程式 $Pu=0$ の空間には，解の変換に対応して可逆な変換（versal）addition や middle convolution（[8] による導入から発展した）が定義され，これは GRS やスペクトル型の変換も引き起こす．与えられた GRS を持つ方程式の存在問題（Deligne-Simpson-Katz 問題）は，このような変換を用いることによって解決された（1 階 Fuchs 系では [1], 不分岐不確定も許す 1 階系では [6], 単独高階 Fuchs 型では [10]）．この変換はリジッド指数を変えないが，リジッド指数毎に軌道は有限となる（Fuchs 型では [10], 不分岐不確定も許す場合は [7]）．特にリジッドな場合は，自明な方程式 $u'=0$ の単一軌道になり，リジッドな方程式は自明な方程式に addition と middle convolution を何回か施すことにより得られる．普遍開折の方程式 $\tilde{P}u=0$ 全体の空間には versal addition（cf. [10]）と middle convolution が作用する．この節では，これらについて解説する．

x 変数の多項式係数の微分作用素環（Weyl 代数）を $W[x]$ とし，$\partial := \frac{d}{dx}$, $\vartheta := x\partial$ とおく．

- Gauge 変換: $\phi(x)\cdot : u(x) \mapsto \phi(x)u(x)$ から引き起こされる微分作用素環の変換 $\operatorname{Ad}\bigl(\phi(x)\bigr)$ が **addition**

$$\begin{gathered}\operatorname{Ad}\bigl(\phi(x)\bigr)(\partial)=\partial-\tfrac{\phi'(x)}{\phi(x)},\quad \operatorname{Ad}\bigl(\phi(x)\bigr)(x)=x,\\ \operatorname{Ad}\bigl((x-c)^{\lambda}\bigr)(\partial)=\partial-\tfrac{\lambda}{x-c},\quad \operatorname{Ad}\bigl(e^{(x-c)^m}\bigr)(\partial)=\partial+m(x-c)^{m-1}\quad (m\in\mathbb{Z}),\end{gathered}\tag{3.1}$$

で，[10, §2.3] で導入された **versal addition** は以下のものである．

$$\begin{aligned}\operatorname{AdV}^0_{(c_0,\dots,c_m)}(\lambda_0,\dots,\lambda_m) &:= \operatorname{Ad}\biggl((x-c_0)^{\lambda_0}\exp\Bigl(\int_\infty^x\sum_{k=1}^m\frac{\lambda_k ds}{\prod_{\nu=0}^k(s-c_\nu)}\Bigr)\biggr)\\ &= \operatorname{Ad}\biggl(\prod_{i=0}^m (x-c_i)^{\sum_{k=i}^m\frac{\lambda_k}{\prod_{1\le\nu\le k,\,\nu\ne i}(c_i-c_\nu)}}\biggr),\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\operatorname{AdV}^0_{(c_0,\dots,c_m)}(\lambda_0,\dots,\lambda_m)(\partial)=\partial-\sum_{k=0}^m\frac{\lambda_k}{\prod_{0\le\nu\le k}(x-c_\nu)},\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{AdV}_{(\frac{1}{c_1},\dots,\frac{1}{c_m})}(\lambda_1,\dots,\lambda_m) &:= \operatorname{Ad}\biggl(\exp\Bigl(-\sum_{k=1}^m\int_0^x\frac{\lambda_k s^{k-1}ds}{\prod_{1\le i\le k}(1-c_is)}\Bigr)\biggr)\\ &= \operatorname{Ad}\biggl(\prod_{i=1}^m(1-c_ix)^{\sum_{k=i}^m\frac{\lambda_i}{c_i\prod_{1\le\nu\le k\,\nu\ne i}(c_i-c_\nu)}}\biggr),\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\operatorname{AdV}_{(\frac{1}{c_1},\dots,\frac{1}{c_m})}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)(\partial)=\partial+\sum_{k=1}^m\frac{\lambda_k x^{k-1}}{\prod_{i=1}^k(1-c_ix)}.\tag{3.5}$$

- 一般階微分 $I_\mu(u)(x) := \dfrac{1}{\Gamma(\mu)}\displaystyle\int_0^x u(t)(x-t)^{\mu-1}dt$ に対応する微分作用素の変換が **middle convolution** mc_μ である（積分の基点は，一般には $u(x)$ の特異点にとる）．

$$\mathrm{mc}_\mu(\vartheta)=\vartheta-\mu,\quad \mathrm{mc}_\mu(\partial)=\partial,\quad I_\mu(x_+^\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\lambda+1)}x_+^{\lambda+\mu}$$

となる．一般の $P \in W[x]$ に対しては，P の係数の共通因子を削っておいて，係数の次数の最大値が N のとき

$$x^N P = \sum C_{i,j} \vartheta^i \partial^j \;\Rightarrow\; \mathrm{mc}_\mu(P) := \partial^{-m} \sum C_{i,j} (\vartheta - \mu)^i \partial^j \in W[x]$$

と定義される（[10] による）．ここで正整数 m は上式の最後が $W[x]$ の元となる最大整数）．

例 3.1. 古典的に知られている超幾何微分方程式の構成の例を挙げる（全てリジッド）．

Gauss hypergeometric : $\mathrm{mc}_\mu \circ \mathrm{Ad}\big(x^\lambda (1-x)^{\lambda'}\big)(\partial)$
${}_3F_2$: $\mathrm{mc}_{\mu_2} \circ \mathrm{Ad}\big(x^{\lambda_2}\big) \circ \mathrm{mc}_{\mu_1} \circ \mathrm{Ad}\big(x^{\lambda_1}(1-x)^{\lambda'}\big)(\partial)$
Appell's F_1 : $\mathrm{mc}_\mu \circ \mathrm{Ad}\big(x^\lambda (1-x)^{\lambda'} (y-x)^{\lambda''}\big)(\partial)$
Appell's F_2, F_3 : $\mathrm{mc}_{\mu_2} \circ \mathrm{Ad}\big((y+x)^{\lambda_2}\big) \circ \mathrm{mc}_{\mu_1} \circ \mathrm{Ad}\big(x^{\lambda_1}(1-x)^{\lambda'}\big)(\partial)$

$Pu(x) = 0$ は $x=0$ と $x=1$ に特異点を持ち，$(0,1)$ 内には特異点がないとしよう．このとき，特異点における漸近挙動は $I_\mu(u)$ により次のように変わる．

定理 3.2 ([10, 17] etc.)**.** $m_0 > m_1 > \cdots > m_k > 0$ を満たす $m_j \in \mathbb{Q}$ を考える．

(1) $u(x) \sim x^\lambda \quad (x \to +0) \quad \Rightarrow \quad I_\mu(u)(x) \sim \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} x^{\lambda+\mu}.$

(2) $u(x) \sim x^\lambda \exp\big(-\frac{C_0}{x^{m_0}} - \frac{C_1}{x^{m_1}} - \cdots\big) \quad (x \to +0)$ and $\mathrm{Re}\, C_0 > 0$
$\Rightarrow \quad I_\mu(u)(x) \sim (m_0 C_0)^{-\mu} x^{\lambda + (m_0+1)\mu} \exp\big(-\frac{C_0}{x^{m_0}} - \frac{C_1}{x^{m_1}} - \cdots\big).$

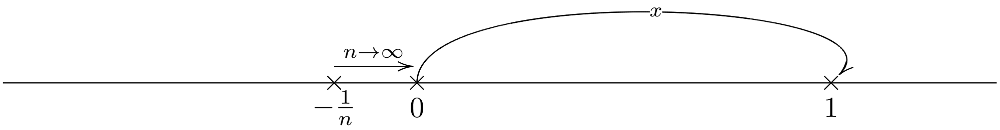
(3) $u(x) \sim (1-x)^{\lambda'} \quad (x \to 1-0)$ and $\mathrm{Re}\,(\lambda' + \mu) < 0$
$\Rightarrow \quad I_\mu(u)(x) \sim \dfrac{\Gamma(-\lambda'-\mu)}{\Gamma(-\lambda')} (1-x)^{\lambda'+\mu}.$

(4) $u(x) \sim (1-x)^{\lambda'} \exp\big(\frac{C_0'}{(1-x)^{m_0}} + \frac{C_1'}{(1-x)^{m_1}} + \cdots\big) \quad (x \to 1-0)$ and $\mathrm{Re}\, C_0' > 0$
$\Rightarrow \quad I_\mu(u)(x) \sim (m_0 C_0')^{-\mu} (1-x)^{\lambda+(m_0+1)\mu} \exp\big(\frac{C_0'}{(1-x)^{m_0}} + \frac{C_1'}{(1-x)^{m_1}} + \cdots\big).$

上の結果は直接計算で示すことができるが，合流と絡めて考えてみよう．I_μ によって，∞ 以外の確定特異点での特性指数は μ 増えることに注意しよう．Fuchs 型の Riemann scheme

$$\begin{Bmatrix} x = -\frac{1}{n} & 0 & 1 & \cdots & \\ -n\lambda & n\lambda + \lambda' & * & * & ;\ x \\ * & * & * & * & \end{Bmatrix} \xrightarrow{I_\mu} \begin{Bmatrix} x = -\frac{1}{n} & 0 & 1 & \cdots & \\ -n\lambda + \mu & n\lambda + \lambda' + \mu & * & * & ;\ x \\ * & * & * & * & \end{Bmatrix}$$

を持つとして，$x \in (0, \epsilon)$, $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $n \to \infty$ に対応する合流を考える．



$u_n(x)$ を特性指数 $n\lambda + \lambda''$ に対応する原点での局所解とする（定数倍は以下で定める）と

$$\begin{aligned} u_n(x) &= x^{n\lambda+\lambda'} \varphi_n(x) \quad (\varphi_n(0) \neq 0) \\ &\sim x^{n\lambda+\lambda'} (x + \tfrac{1}{n})^{-n\lambda} \sim n^{n\lambda} x^{n\lambda+\lambda'} \quad (x \to +0) \\ &= x^{\lambda'} (1 + \tfrac{1}{nx})^{-n\lambda} \to x^{\lambda'} e^{-\frac{\lambda}{x}} \qquad (n \to \infty), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_\mu(u_n)(x) &\sim C_n x^{n\lambda+\lambda'+\mu}(x+\tfrac{1}{n})^{-n\lambda+\mu} \sim C_n n^{n\lambda-\mu}x^{n\lambda+\lambda'+\mu} \quad (x\to +0)\\
&= C_n x^{\lambda'+\mu}(x+\tfrac{1}{n})^{\mu}(1+\tfrac{1}{nx})^{-n\lambda} \to Cx^{\lambda'+2\mu}e^{-\frac{\lambda}{x}} \qquad (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

ここで C_n はある定数で $C=\lim_{n\to\infty} C_n$. 定理 3.2 (1) より

$$
\begin{gathered}
C_n n^{n\lambda-\mu} \sim \frac{\Gamma(n\lambda+\lambda'+1)}{\Gamma(n\lambda+\lambda'+\mu+1)} n^{n\lambda} \qquad (\lambda''=n\lambda+\lambda'),\\
C=\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n\lambda+\lambda'+1)}{\Gamma(n\lambda+\lambda'+\mu+1)} n^{\mu} = \lim_{n\to\infty}(n\lambda)^{-\mu}n^{\mu}=\lambda^{-\mu}
\end{gathered}
$$

が分かるので，合流によって $m_0=1$, $k=0$ の場合の定理 3.2 (2) が分かる．

注意 3.3. (1) 一般には，定理 3.2 における漸近挙動は，特異点（今の場合は 0 と 1）を頂点とする角領域で与え，I_μ の積分路は特異点の近傍ではその角領域内を通るように取る．
(2) 各特異点での重複度最大の特性指数が 0（無限遠点では定数）となるように addition を施し，適当な μ で middle convolution mc_μ を施すと，方程式の階数が下がることが多い．これを Katz reduction と呼ぼう（cf. [5, 8, 10, 17]). 特に（分岐不確定特異点のない）リジッドな方程式は Katz reduction を続けると最終的に 1 階の自明な方程式 $u'=0$ に行き着く．このことと定理 3.2 とから, [10, Theorem 12.6] （cf. [9, 15]）では，リジッド Fuchs 型の方程式の接続公式を得た．同様にして，[14] では不確定特異点における局所モノドロミーを与えた．
(3) Katz reduction の逆をたどり，addition を全て versal addition で置き換えることによって，元のリジッドな方程式のリジッドな Fuchs 型方程式の中への埋め込み（普遍開折）が得られる．

Katz reduction を行っても階数が減らないスペクトル型を **basic** なスペクトル型と呼ぶが, 同じリジッド指数をもつ basic なスペクトル型は有限個しかない（cf. [7, 11]）. リジッド指数が -2 以上の basic なスペクトル型のリストが [7] で得られ，対応する方程式の普遍開折の存在が，普遍開折の GRS をもつ Fuchs 型方程式を具体的に構成する（構成法は [10] でそれを数式処理上で実現したのが [16]）ことによってわかり，リジッドな場合と同様に予想が成り立つこと，すなわち定理 2.5 が得られる．

4 Examples

4.1 11|11|11 : 普遍 Gauss 超幾何

§1 で考察した方程式は $\tilde P = \mathrm{mc}_{\mu'}\circ \mathrm{AdV}_{(\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_2})}(\lambda_1',\lambda_2')\,\partial$ で，それから解の積分表示も得られる．

4.2 111|21|21 : 普遍一般超幾何

${}_3F_2(x)$ の合流に対応する普遍開折は，$c=\frac{1}{t_1}$, $\frac{1}{t_2}$, ∞ として以下の解をもつ．

$$
\int_c^x\int_c^t \exp\Bigl(-\int_0^s \frac{\lambda_1(1-t_2u)+\lambda_1'u}{(1-t_1u)(1-t_2u)}du\Bigr)(t-s)^{\mu_1-1}(1-t_1t)^{\frac{\lambda_2}{t_1}}(x-t)^{\mu_2-1}ds\,dt.
$$

4.3 $\overbrace{11|11|\cdots|11}^{p+1 \text{ copies of } 11}$ $\quad \operatorname{idx}\mathbf{m}=6-2p \quad (p=2:\ \text{Gauss},\ \ p=3:\ \text{Heun})$

$$\tilde{P}=\prod_{j=1}^{p}\Bigl(1-t_jx\Bigr)\partial^2+\Bigl(\sum_{j=1}^{p}\lambda_jx^{j-1}\Bigr)\partial+\mu\Bigl(\lambda_p-(-1)^p(\mu+1)\prod_{j=1}^{p-1}t_j\Bigr)x^{p-2}+\sum_{j=0}^{p-3}r_jx^j$$

$r_0,\dots,r_{p-3}$ はアクセサリー・パラメータ．

$$\begin{Bmatrix} x=\infty & x=\frac{1}{t_j}\quad (j=1,\dots,p) \\ \mu & 0 \\ \frac{(-1)^p\lambda_p}{t_1\cdots t_p}-\mu-1 & \frac{\sum_{i=1}^{p}t_j^{p-i}\lambda_i}{t_j\prod_{1\le i\le p,\,i\ne j}(t_j-t_i)}+1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} x=\infty \\ \mu \\ p-1-\mu+\lambda_1x+\cdots+\lambda_px^p \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x=\infty & (1) & \cdots & (p) \\ \mu & 0 & \cdots & 0 \\ p-1-\mu & \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \end{Bmatrix}\quad (\forall t_j=0).$$

4.4 $\overbrace{1(p-1)|1(p-1)|\cdots|1(p-1)}^{p+1 \text{ copies of } 1(p-1)}$ $\quad$ versal Jordan-Pochhammer (F_D)

$$\tilde{P}=\mathrm{mc}_\mu\circ\mathrm{AdV}_{(\frac{1}{t_1},\dots,\frac{1}{t_p})}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\,\partial=\sum_{k=0}^{p}p_k(x)\,\partial^{p-k},$$

$$p_0(x)=\prod_{j=1}^{p}(1-t_jx),\ \ q(x)=\sum_{k=1}^{p}\lambda_kx^{k-1}\prod_{j=k+1}^{p}(1-t_jx),$$

$$p_k(x)=\binom{-\mu+p-1}{k}p_0^{(k)}(x)+\binom{-\mu+p-1}{k-1}q^{(k-1)}(x).$$

$$\begin{Bmatrix} x=\infty & x=\frac{1}{t_i}\quad (i=1,\dots,p) \\ [1-\mu]_{(p-1)} & [0]_{(p-1)} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^i\lambda_i}{\prod_{1\le\nu\le i}c_\nu}-\mu & \displaystyle\sum_{k=i}^{p}\frac{\lambda_k}{c_i\prod_{\substack{1\le\nu\le k\\ \nu\ne i}}(c_i-c_\nu)}+\mu \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} x=\infty \\ [1-\mu]_{(p-1)} \\ (p-1)\mu+\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_ix^i \end{Bmatrix}\quad (\forall t_i=0)$$

$p=3$ のときの普遍開折の Fuchs 型方程式は確定特異点 4 個をもつが，その特異点も変数と考えると，多変数の超幾何（Appell の F_1 の方程式）が得られる．特異点を $\{0,\,1,\,1-y,\,\infty\}$ として，その方程式の解を考えてみよう（(x,y) は原点の近傍にあるとする）．

$$\begin{aligned} u(x,y) &:= x^{\lambda_1}(1-x)^{\lambda_2}(1-y-x)^{\lambda_3}=x^{\lambda_1}(1-x)^{\lambda_2+\lambda_3}\bigl(1-\frac{y}{1-x}\bigr)^{\lambda_3} \\ &= \sum_{m,\,n=0}^{\infty}(-\lambda_2-\lambda_3+n)_m(-\lambda_3)_n\frac{x^{\lambda_1+m}}{m!}\frac{y^n}{n!} \\ &\xrightarrow{I_\mu}\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda_1+1)}{\Gamma(\lambda_1+\mu+1)}\cdot\frac{(-\lambda_2-\lambda_3+n)_m(-\lambda_3)_n(\lambda_1+1)_m}{(\lambda_1+\mu+1)_m}\frac{x^{\lambda_1+m+\mu}}{m!}\frac{y^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda_1+1)}{\Gamma(\lambda_1+\mu+1)}x^{\lambda_1+\mu}\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_2-\lambda_3)_{m+n}(\lambda_1+1)_m(-\lambda_3)_n}{(\lambda_1+\mu+1)_m(-\lambda_2-\lambda_3)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \end{aligned}$$

5 Confluence/unfolding of Pfaffian form and KZ type

リジッドな単独 Fuchs 型方程式は，1 階の Schlesinger 型

$$\frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{x - x_j} u \tag{5.1}$$

表示をもつ．A_j は正方の定数行列で，$x_1, \ldots, x_n$ と ∞ が特異点である．この形式での Katz の addition と middle convolution は [2] で論じられた．一方，上記リジッド方程式は $x_0 = x$ のほか $x_1, \ldots, x_n$ も変数とみなすと KZ 型（Knizhnik-Zamolodchikov）方程式

$$\frac{\partial\, u}{\partial\, x_i} = \sum_{0\le\nu\le n,\ \nu\ne i} \frac{A_{i,\nu}}{x_i - x_\nu} u \quad (i = 0, \ldots, n) \tag{5.2}$$

に（本質的に一意に）拡張されるが，このことも addition と middle convolution を用いて示された（cf. [3, 4, 12, 13]）．なお，$A_{i,j}$ は可積分条件

$$A_{i,j} = A_{j,i},\ [A_{i,j}, A_{k,\ell}] = [A_{i,j}, A_{i,k} + A_{j,k}] = 0 \quad (\#\{i,j,k,\ell\} = 4) \tag{5.3}$$

を満たす．

定理 5.1. リジッドで分岐不確定特異点を持たない $\mathbb{P}^1$ 上の方程式の普遍開折は，多変数化によって合流型 *KZ* 型方程式の普遍開折に拡張される．

リジッドな普遍開折は，自明な方程式から versal addition と middle convolution を繰り返し施すことによって得られるので，それに対応することを KZ 型方程式で考えればよい．それにはたとえば (5.1) を以下のように書き直せばよい（不確定特異点の状況に応じて変えるのがよい）．

$$\frac{du}{dx} = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{x - x_j}\Big) u = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_j)}\Big) u \tag{5.4}$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{C'_j x^{j-1}}{(1 - y_1 x)(1 - y_2 x)\cdots(1 - y_j x)}\Big) u. \tag{5.5}$$

(versal) additon は，（パラメータを含む）定数行列 A_j や C_j に（パラメータを含む）スカラー行列を加えることである．middle convolution は I_μ で定まる関数の変換に対応して定義された．上の (5.4) の右端を用いた場合は

$$u \mapsto \tilde{u} = \begin{pmatrix} I_\mu \frac{u}{x-x_1} \\ I_\mu \frac{u}{(x-x_1)(x-x_2)} \\ \vdots \\ I_\mu \frac{u}{(x-x_1)\cdots(x-x_n)} \end{pmatrix}$$

という変換を考えればよい．このとき C_j はある $\tilde{C}_j$ に変換されるが，さらに $\tilde{C}_j$ 達に非自明な最大不変真部分空間が存在する場合は，それによる商空間上に線型変換 $\tilde{C}_j$ が誘導する行列 $\bar{C}_j$ によって middle convolution が定義される．以下，例を示す．

$$s_{i,j_1\cdots j_k} := \prod_{\nu=1}^{k}(x_i - x_{j_\nu})$$

とおくと，$n=3$ のときは

$$\tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & s_{2,1} & 0 \\ 0 & 1 & s_{3,1} \end{pmatrix},$$
$$\tilde{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & s_{2,1} & s_{3,12} \end{pmatrix}.$$

たとえば，$n=3$ で x_1 と x_2 の合流に対する普遍開折では，$(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, y, y+e, x_3)$ という変数を用いればよい．方程式系を

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_0} &= \left(\frac{C_{01}}{x_0 - y} + \frac{C_{02}}{(x_0-y)(x_0-y-e)} + \frac{C_{03}}{x_0 - x_3} \right) u, \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} &= \left(\frac{C_{30}}{x_3 - x_0} + \frac{C_{31}}{x_3 - y} + \frac{C_{32}}{(x_3-y)(x_3-y-e)} \right) u, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \Big(\sum_{j=0,3} \frac{C_{j1}}{y - x_j} - \sum_{j=0,3} \frac{C_{2j}}{(y-x_j)(y+e-x_j)} \Big) u \end{aligned}$$

と表しておくと（$C_{ij} = C_{ji}$）

$$\tilde{C}_{10} = \begin{pmatrix} C_{01}+\mu & C_{02} & C_{03} \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{13} = \begin{pmatrix} C_{31}+C_{03} & 0 & -C_{0,3} \\ 0 & C_{31}+C_{03} & 0 \\ -C_{01} & -C_{02} & C_{31}+C_{01} \end{pmatrix},$$
$$\tilde{C}_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{01}+\mu & C_{02}+e\mu & C_{03} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{23} = \begin{pmatrix} C_{32} & 0 & 0 \\ C_{03} & C_{32}+eC_{03} & -C_{03} \\ -C_{02} & -eC_{02} & C_{32}+C_{02} \end{pmatrix},$$
$$\tilde{C}_{30} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{01} & C_{02} & C_{03}+\mu \end{pmatrix}$$

などとなる（$\tilde{C}_{ij} = \tilde{C}_{ji}$）．

参考文献

[1] Crawley-Boevey, C., On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero, Duke Math. J. **118** (2003), 339–352.

[2] Dettweiler, T. and S. Reiter, An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761–798.

[3] Haraoka, Y., Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements, Adv. Studies in Pure Math. **62** (2012), 109–136.

[4] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015, 363pp.

[5] Hiroe, K., Linear differential equations on $\mathbb{P}^1$ and root systems, J. Algebra **382** (2013), 1–38.

[6] Hiroe K., Linear differential equations on the Riemann sphere and representations of quivers, Duke Math. J. **166** (2017), 855–935.

[7] Hiroe K. and T. Oshima, A classification of roots of symmetric Kac-Moody root systems and its application, in *Symmetries, Integrable Systems and Representations*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 40 (2012), 195–241.

[8] Katz, N. M., *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, 1995.

[9] 大島利雄, 特殊函数と代数的線型常微分方程式, 東京大学数理科学，レクチャーノート **11**, 2011, 111pp (廣惠一希記).
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/publication/documents/spfct3.pdf`

[10] Oshima, T., *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, MSJ Memoirs, vol. 11, Mathematical Society of Japan, 2012, 203pp.

[11] 大島利雄，Riemann 球面上の複素常微分方程式と多変数超幾何函数，第 14 回岡シンポジウム講義録，53–97, 奈良女子大, 2016.
`http://www.nara-wu.ac.jp/omi/oka_symposium.html`

[12] Oshima, T., Transformations of KZ type equations, in *Microlocal Analysis and Singular Perterbation Theory*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B61** (2017), 141–162.

[13] 大島利雄，KZ 型超幾何系の変換と解析，表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題, 数理解析研究所講究録 **2031** (2017), 124–158.

[14] Oshima, T., Semilocal monodromy of rigid local system, in *Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations*, Springer Proceedings in Mathematics and Statics **256** (2018), 189–199.

[15] 大島利雄，Fuchs 型方程式の接続問題, 超局所解析と漸近解析, 数理解析研究所講究録 **2101** (2019), 98–118.

[16] 大島利雄, `os_muldif.rr`, 数式処理 `Risa/Asir` のライブラリ, 2008–2019.
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/`

[17] Oshima T., Versal unfolding of irregular singularities of a linear differential equation on the Riemann sphere, preprint.