集合と位相
―計算しない数学―

斎藤　毅

　このたび、大学二年生向けの現代数学の教科書の二冊目を書くことができた。この次は何を書くのかときかれることもあるが、わたし的には、この二冊で完結している。なぜそうなのかということを、この機会に書いておきたい。

計算しない数学

「線形代数の世界」（ＵＰ　二〇〇七年十二月）にも書いたが、微積分と線形代数は、現代数学を支える二本の柱であり、理系の一年生の必修科目である。理学部数学科に進学する学生は、数学の必修科目を、二年生の冬学期に三つとることになっている。そのうちの二つでは、それぞれ、一年生の線形代数と微積分の続きをする。今回書いたのは、もう一つの「集合と位相」の教科書である。

　集合と位相は、一年生の線形代数と微積分を含めた、数学全体の基礎である。ならば、先にやればよいではないかと思われるかもしれないが、論理的な順序どおりにやればうまく行く、というものでもない。小学校でも、最初にならうのはひらがなや簡単な文章で、さきに文法規則を教わるわけではない。

　必修三科目の中で、「集合と位相」には、他の二科目とは異質の難しさがあるようだ。大学受験を通って、さらに数学科に進もうという学生たちなのだから、ふつうの人より数学に対する免疫をはるかにもっているに違いない。それでもぶつかる「集合と位相」の難しさの原因は、数学に対する先入観とのずれにあるように思える。どんなに計算が得意でも、「集合と位相」を理解するにはあまり役に立たないようだ。

　二十世紀に、自然科学はどの分野も大きな変貌を遂げた。その代表的なものが、量子力学や分子生物学だろう。これらは、現代の物質や生物に対する人類の理解の根底にある。しかし、それらは、日常的な知識の延長線上にあるようには見えない。膝の上にいる猫が好きだということと、そのＤＮＡを解読することとの間には、一見何の関係もないように思える。

　あまり知られていないことかもしれないが、数学も十九世紀から二十世紀にかけて、同じような大きな変貌を遂げている。量子力学や分子生物学のような、わかりやすい名前があればよかったのだが、それは、現代数学とか抽象数学とかよばれている。

　自然科学の変貌をもたらしたものは、一つには、顕微鏡や望遠鏡などをはじめとする機器の発達により、目に見えない世界が観測できるようになったことだろう。加速器や遺伝子組換えによって、未知の現象を人工的に作り出すこともできるようになった。現代数学でこれに相当するものが、集合と位相に代表される、抽象的な構成であり、操作である。

　ふつうの人にとっては、数学とはまず計算だろう。計算ができれば、いろんな問題が解ける。方程式も解けるし、接線や面積だって

求まる。しかし、現代数学の核心にあるのは、抽象的な概念の構成である。それは、集合のことばで表現される。

数学とは計算だと思う人にとっては、ａを計算して変形していってｂにたどりつけば、ａ＝ｂという等式ができあがる。ところが、同じ式を証明するのに、違うやり方がある。ａとｂが要素を一つしか含まない集合Ａの要素ならば、やはりａ＝ｂが得られる。ちょっと単純化しすぎてはいるが、これが抽象数学の方法である。

この方法では、集合Ａを設定するところが、実は鍵になっている。目標の式からみると、何か回り道をしているように見えるが、そういう場を設定することで、一見何もしないでいるうちに証明ができてしまう。

数学者がおつりの計算が苦手だというのは、よくあるネタだが、数学者にも、計算が好きでたまらない人と、私のようにできればしないですませたいという人の二種類がある。計算の好きな人に、私は計算をしない工夫を考えるのが好きだと話したら、そんなことをいう数学者がいるとは思わなかったと驚かれたことがある。

それはともかく、「集合と位相」では、このような、抽象的な概念や対象の操作を体系的、組織的に学ぶ。計算が得意だから数学に向いていると思っていた学生も、それまでとは違う頭の使い方が要求される。

「集合と位相」を教えることは、単に知識の体系を伝えることではなく、数学観を転換させることになる。考え方そのものを変えるとなると、思想教育とか洗脳ということばも浮かんでくる。それでは、難しいのもしかたがない。

抽象数学のことば

数学科の二年生は、なぜ、そういう抽象的な概念を学ぶところから始めなくてはいけないのだろうか。それは、現代の数学の対象も、日常的な理解の延長線上にあるものではなくなってしまっているからである。

小学校以来慣れ親しんできた数学の対象は、まずは数でありそして図形だった。現代数学の対象は、もちろんそういったものとつながっているのだが、いわゆる常識の通用しないものになっている。それらを間違いなく扱うには、「集合と位相」で学ぶような抽象的な考え方が欠かせない。

物理学や生物学でも、扱う対象は、目の前の物体や生き物を離れて、素粒子や遺伝子になってしまっている。それと同じように、数学の対象も、ふつうに思い浮かべるような数や図形ではなくなっている。素粒子や遺伝子ならば、いくら極微の世界にあるといっても、観測する手段を準備すれば、それはそこにあるはずである。しかし、ふつうの数や図形に対する常識の通用しない世界にある数学の対象を扱うには、どうすればよいのだろう。

それには、数学で扱いたい対象を、集合として構成すればよい、と現代数学では考える。自然という書物は数学のことばで書かれているといわれるが、抽象数学は集合のことばで書かれている。

ふつうの数やふつうの空間から出発して、新しい数の体系や空間

を、集合として構成する。そうすれば、それらは、少なくとも、もとの数や空間が存在するのと同様な意味で存在すると考えられる。それらを扱うのに、慣れるまでは手間がかかるかもしれないが、ふつうの数やふつうの空間と、扱う方法は違わない。こういう考えに慣れてくると、特別な手段を使わないと捉えられない、素粒子や遺伝子のほうが、よほど抽象的な対象にも思えてくる。

　現代数学が徹底的に抽象化されたといっても、なじみ深い数や図形と無縁のものになってしまったわけではない。実は、むしろその逆である。ふつうの数やふつうの空間をもっとよく理解するために、見慣れない数や見慣れない空間を考え出したとも言える。

　一つしかない対象の研究は、難しいといわれる。人の脳や宇宙などがそうだろう。一つしかないものは、それと似たものと比較して、相違点や類似点に着目することができない。現代数学では、抽象的な構成のおかげで、ふつうの数やふつうの空間を、見慣れない数や見慣れない空間と比べて考えることができるようになった。ふつうの数やふつうの空間と思っていたものが、どのくらいふつうでどのくらい特殊かを問題にすることができるようになったのである。

　フェルマーの最終定理が解決されて話題になったことを覚えている人も多いだろう。フェルマーの最終定理そのものは、なじみ深い整数についての話だが、その証明は、高度な現代数学を駆使するものだった。物体の色や硬さが量子力学で説明されるように、フェルマーの方程式に解がないことも、現代数学で証明されたのである。

抽象数学の起源

物理学や生物学が極微の世界の探索に向かったときに、数学が抽象へと向かったのはなぜだろうか。実は、数学の抽象化は、最近に始まった話ではない。数学は、はじめから抽象的なのである。

　小学校のテストをもちだすまでもなく、三という数そのものを見た人はひとりもいない。３という数字は、数を表す記号であって、数そのものではない。ひらがなが読めないと、「さん」が３だとはわからない。[san]と読んでみても、フランス人なら１００だと思うかもしれない。三人の子どもと、三歳の子どもから、３という数を共通点として見出すのは、かなりの抽象能力がいることに違いない。

　数は、ふつうの意味で実在するものではなく、人の頭の中にのみ存在する。数学者は、プラトンのイデアのように、数学的実在について語るが、これは、やはり主観的な存在としかいえない。数学的対象に、現実の物体や出来事と同じような存在感を感じられるようにならなければ、一人前の数学者にはなれない、とはいえるかもしれないが。

　数のもつそのような性格は、言語とよく似ている。数と言語の共通点はよく指摘されるところだが、チョムスキーによれば、言語は人間に生得的にそなわっているものだそうだ。とすると、数も人間に生得的にそなわっているのだろうか。もしそうなら、どの程度までそうなのだろう。脳の器質的障害による失数症、などということもあるのだろうか。

数学は、もとから抽象的なものだとしても、幾何学は現実の空間を理想化してとらえるものだ、と長い間考えられていた。現代のような抽象的な考え方の重要性が認識されたのは、やはり、十九世紀になってからだろう。数学の抽象化は、幾何学の対象が、現実の三次元空間から解放されるために、どうしても必要だった。

十九世紀には、一年生の線形代数で習うような、高次元空間が考えられるようになった。その前史には、平面や空間の点を、数の組で表わす座標の考えがある。これは、中学校以来おなじみのもので、あたりまえに思えるかもしれないが、数学史上、第一級の発見だった。逆説的にきこえるだろうが、後になってあたりまえに思えるものほど、根本的で優れた考えなのである。

そこからもう一歩を踏み出したのがリーマンだった。彼の大胆な着想により、幾何学は現実の空間から自由になった。アインシュタインが二十世紀に一般相対性理論を作ったときに、そのために必要な、曲がった空間の幾何学は、十九世紀にリーマンが既に準備していた。

物質を原子に分解して考えるように、数学的対象は集合として考えると、点の集まりに解体される。そこに、位相を導入することで、ばらばらの点の集まりを、幾何的な対象として再構築することができる。そうなると、幾何的な対象は、もはや図形である必要もない。関数からなる空間や、関数の関数からなる空間の幾何学について語ることも、できるようになった。

数学の抽象化は、幾何学だけで起こったのではない。数学とは計算だと思っても、では、その計算規則の妥当性はどう保証されるのだろう。一年生で学ぶ微積分の内容も、その根拠を明確にするには、多くの年月と努力が費やされた。最終的に、それは、実数の集合を抽象的に構成することで正当化されたのだった。

抽象数学の普及

二十世紀に、抽象数学の普及にもっとも貢献したのは、ブルバキだろう。現代哲学に興味のある人は、構造主義ということばに結びついた、ブルバキという名前をご存じかもしれない。ブルバキとは、全数学を集合論の上に展開するという理念を実行に移した、フランスの数学者集団のペンネームである。その成果は、「数学原論」という大部の本として、数学に大きな変革をもたらした。

「数学原論」に対しては、いろいろ批判もされているが、それが、抽象数学の普及に大きな役割を果たしたことに、異論はないだろう。十九世紀には、ガウスやリーマンのような天才にのみ許されていたことが、根気よく「数学原論」を読めば、ふつうの人にもたどり着けるようになった。

「数学原論」は、数学そのものだけでなく、数学教育にも大きな影響を与えた。筆者と同世代の方には、小学校で集合を教わって、何のことかと思ったことを覚えている人も多いだろう。これは、数学の基礎が集合論ならば、その基礎を小学校で教えるのがよいだろうと考えた人がいたからに違いない。

ブルバキは、集合論を基礎として数学を展開したが、その中で、

代数学の基礎は線形代数においた。この数学観が広まったことの結果として、線形代数が一年生の必修科目で、二年生では集合と位相が必修だという現状がある。個人的には、線形代数と、その姉妹編の、集合と位相の教科書を書くことになったということもある。

　友人のフランスの数学者に、今度「集合と位相」を教える予定だと話したら、日本では、まだ位相空間論を授業できるのかと感心された。ブルバキの本国でも、位相空間論は抽象的過ぎるとして、大学のカリキュラムからは消えてしまっているらしい。

「集合と位相」の原稿は、実は、一年前には一通りできあがっていたのだが、そのあと、去年の講義が終わるまで待っていた。講義を準備するときに、教える内容を整理するには、時間さえ作れればよい。しかし、それが学生にどう伝わるかを予測するのは難しい。特に、「集合と位相」のように、考え方を教えるときは、やってみないとわからない。そこで、講義の反応をみながら、原稿に手を入れていたのである。

　数学者にとっては、数学の抽象的な考え方は日常そのものである。そんなことをいちいち意識しないでできるからこそ、数学者として食べていける。だから、初心者がどこでつまずくのかは、想像するのが難しい。自分が昔勉強したときに、どこで苦労したかなどということは、とっくに忘れてしまっている。

　自転車の乗り方を教えたことのある人は、知っているだろうが、あれは、教わって乗れるようになるものではない。乗り方をことばで説明できるものでもないし、お手本をみてもまねができるものでもない。教える人には、後ろで押さえていることぐらいしかできない。抽象的な数学の考え方も、実は体で覚えるしかないことなのかもしれない。

　数学を学ぶときに、抽象論の習得に時間を費やすよりも、それぞれの対象に早くとりくんだ方がよいという考えもあるようだ。しかし、量子力学を知らずに、物体の性質を調べようと思っても限界があるように、抽象論の力を借りずに数学的対象を調べようとしても、できることは限られている。新しい公式を見つけたと思っても、十九世紀にすでに調べられていたかもしれないし、二十世紀の抽象論の特別の場合にすぎないかもしれない。

　数学に王道はないといわれるが、抽象数学の基本を手っ取り早く身につけられるなら、それに越したことはない。しかし、「数学原論」を読むといっても、それが簡単にはできないことは、図書室に行って本棚を見れば一目でわかる。

　そこで、こんな本があればと思って、「線形代数の世界」と「集合と位相」を書いた。内容は基本的なところだけに絞って、つまずきそうなところにも、私としては気をくばったつもりである。この二冊では、ほんの入り口を扱っただけだが、抽象数学の世界の敷居が、少しは低くなってくれればありがたい。