

デカルトの正葉線 (folium cartesii)

Yukimi Goto

デカルトの正葉線 [1] と呼ばれる曲線

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$$

の図を描くことについて考える。まず $x < 0, y < 0$ のときはつねに $f(x, y) < 0$ だから、第 3 象限内に曲線がないことはすぐわかる。

★ 停留点

$f_x = 3x^2 - 3ay = 0, f_y = 3y^2 - 3ax = 0$ を解くと

$$ax - y^2 = ax - \frac{x^4}{a^2} = 0$$

から $x = 0, a$ となり停留点は $(0, 0)$ と (a, a) になることがわかる。原点で $f_{xx} = 0 = f_{yy}, f_{xy} = -3$ だから $\det H(0, 0) = -9 < 0$ から極値を取らない。実際、原点では $ay = x^2$ と $ax = y^2$ の二つの曲線が交わり、 x 軸と y 軸に平行な接線があるのでひとつに決まらない。同様に考えると $\det H(1, 1) = 36 - 9 > 0$ と $f_{xx} > 0$ から $f(1, 1) = -1$ が極小値になることがわかる。

★ 接線の方程式

$f_y \neq 0$ では陰関数定理から

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}$$

で点 (x, y) における接線の方程式は

$$(x^2 - ay)(X - x) + (y^2 - ax)(Y - y) = 0.$$

★ 第 2 象限でのふるまい

第 2 象限の中で $y' < 0$ であるから、陰関数定理よりこの領域に連続な曲線が存在する。しかし x 軸上で $f(x, 0) < 0$ であり、 $x^2 = ay$ 上で $f(x, y) = y^3 - 2x^3 > 0$ だから、第 2 象限の中では x 軸と $y = x^2$ のあいだに曲線がある。

さらに詳しくみるために漸近線を求める。曲線上で $x \rightarrow r \in \mathbb{R}$ のとき $y \rightarrow \pm\infty$ になることはないので漸近線は $y = mx + k$ としてよい。 $f = 0$ を x^3 で割り $x \rightarrow \pm\infty$ とすると

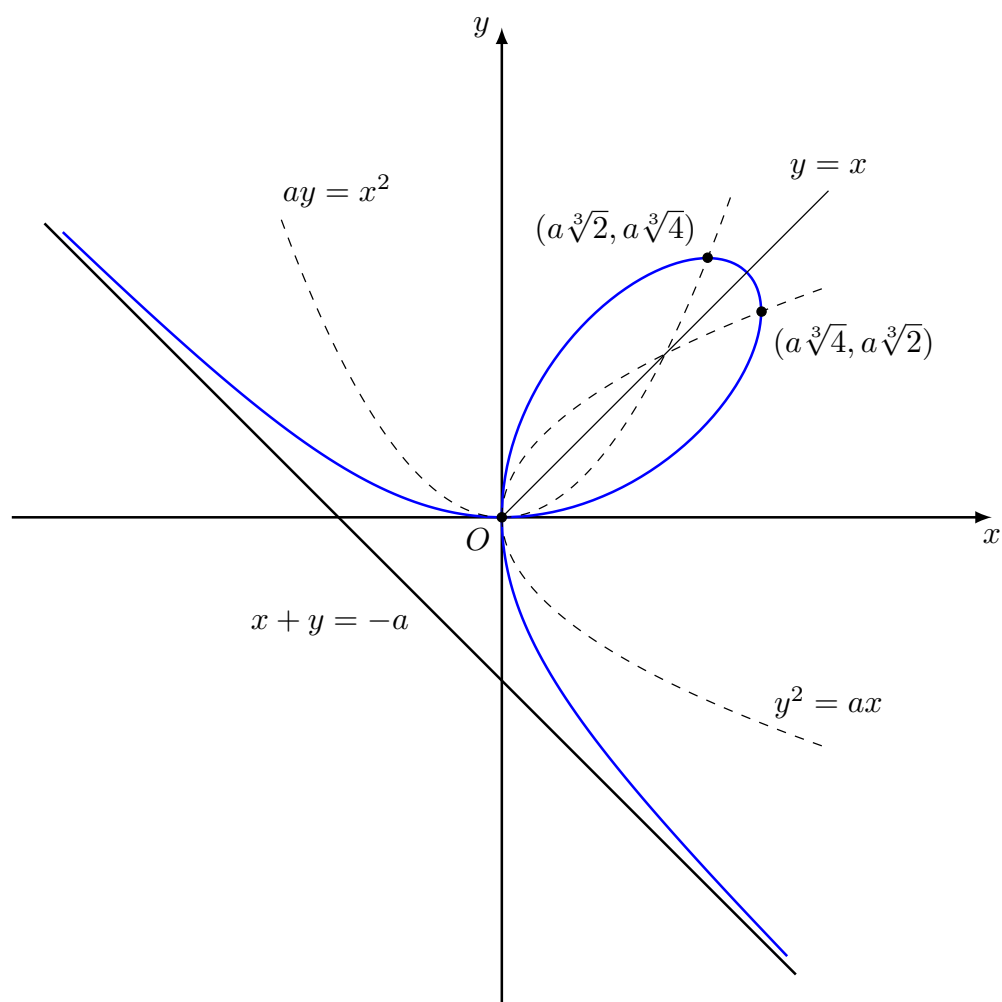
$y/x \rightarrow m$ より $m^3 + 1 = 0$ で $m = -1$ となる。また、

$$x + y = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} = \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} \rightarrow -a \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

から $k = -a$ がわかるので $y = -x - a$ が漸近線になる。よって曲線はつねにこの漸近線の上側にある。これで第2象限でのようすがわかる。第4象限ではこれと対称なものがとれる。

★ 第1象限でのふるまい

第1象限では以下のように考える。 $f_x = 0 = f$ は $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$ という解をもち、この点で x 軸に平行な接線が引ける。また、対称性から $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$ で y 軸に平行な接線をもつ。さらに $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$ で $y'' = 2x/(ax - y^2) < 0$ となって $a\sqrt[3]{4}$ は y の極大値になっている。つまりこの点の近くで曲線は接線の下側にある。対称性から $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$ の近くでは接線の左側にある。 $ay = x^2$ と $y^2 = ax$ のグラフと比較して増減を考えると第1象限でのようすがわかり、下図のようになる。



青が $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ の曲線（デカルトの葉線）

★ 極座標・媒介変数表示

一方、デカルトの葉は極座標では

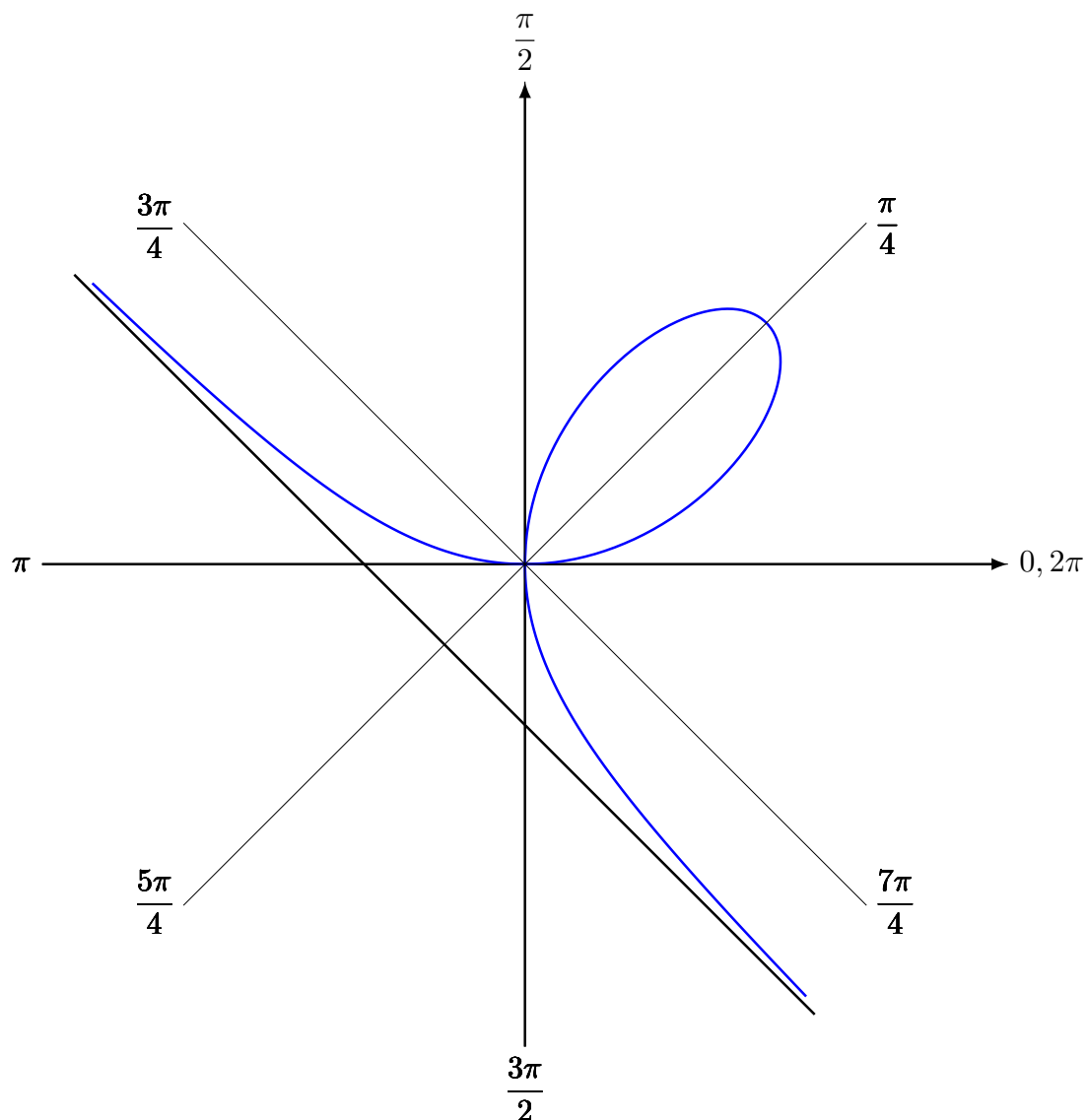
$$r = \frac{3a \cos \theta \sin \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$$

となり、 $t = \tan \theta = y/x$ の変換でパラメータ表示

$$x = r \cos \theta = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = r \sin \theta = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

をもつ。原点が $t = -\infty$ に対応し、 $-\infty < t < -1$ が第 4 象限、 $-1 < t < 0$ が第 2 象限に対応する。 $t = 0$ でふたたび原点にもどり、正の値が第 1 象限に対応する。

このことから、たとえば第 2 象限 $-1 \leq t = \tan \theta \leq 0$ では $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$ などがわかる。



$a = 1$ のときの図

★ 漸近線にはさまれた部分の面積

デカルトの葉とその漸近線に囲まれた領域の面積を求めてみる [2]。まず漸近線の極座標表示が

$$r = -\frac{a}{\cos \theta + \sin \theta}$$

に注意する。第 2 象限の面積 S は極座標で $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$ の部分の面積を足し引きすればよく、周知の公式から

$$S = \frac{1}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \left[\left(\frac{a}{\sin \theta + \cos \theta} \right)^2 - \left(\frac{3 \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta} \right)^2 \right] d\theta = \frac{a^2}{2}$$

がわかる。対称性から第 4 象限もおなじ。第 3 象限の三角形の面積も $a^2/2$ なので、結局求める面積は $3a^2/2$ となる。

参考文献

- [1] 高木貞治、『定本 解析概論』、岩波書店 (2010).
- [2] 高瀬正仁、『古典的難問に学ぶ微分積分』、共立出版 (2013).