

ON TENSOR PRODUCTS OF MIRKOVIĆ-VILONEN POLYTOPES IN TYPE A

東京大学大学院数理科学研究科 斉藤 義久 (Yoshihisa Saito)
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

筑波大学大学院数理物質科学研究科 佐垣 大輔 (Daisuke Sagaki)
Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba

筑波大学大学院数理物質科学研究科 内藤 聡 (Satoshi Naito)
Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba

1. INTRODUCTION

1.1. \mathfrak{g} を \mathbb{C} 上の有限次元単純 Lie 代数, P_+ を dominant integral weight の集合, $U_q(\mathfrak{g})$ を対応する量子包絡環とする. また $V(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$) を highest weight λ の有限次元既約表現, $B(\lambda)$ をその crystal basis とする.

$\lambda, \mu \in P_+$ とするとき, $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現の完全可約性から

$$B(\lambda) \otimes B(\mu) \cong \bigoplus_{j=1}^l B(\nu_j) \quad (\nu_j \in P_+)$$

と分解する. 与えられた $\lambda, \mu \in P_+$ に対して, 上のような $\nu_j \in P_+$ を具体的に求める問題は表現論の基本問題の一つであり, 非常に詳しく調べられている.

ここでは, さらに一歩進んで次のような問題を考えたい.

Problem 1. $B(\nu)$ が $B(\lambda) \otimes B(\mu)$ の既約成分に現れるとして, 埋め込み

$$\Phi_{\nu; \lambda, \mu} : B(\nu) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\mu)$$

を 1 つ固定する. この記法の下に

$$\Phi_{\nu; \lambda, \mu}(b) = b_1 \otimes b_2$$

であるとき, b と b_1, b_2 の関係を具体的に記述せよ.

もちろん, 一般には $B(\nu)$ は $B(\lambda) \otimes B(\mu)$ の中に重複度 1 で含まれているとは限らないので, そういう場合には埋め込みの仕方まで指定して初めて意味のある問題となる.

また, Problem 1 は次のような問題を同時に含んでいることに注意して頂きたい. 一般に $b \in B(\lambda)$ は Kashiwara operators f_i ($i \in I$) を用いて

$$b = \tilde{f}_{i_1} \tilde{f}_{i_2} \cdots \tilde{f}_{i_k} b_\lambda$$

と書くことが出来る (b_λ は $B(\lambda)$ の highest weight element) けれども, その表示の仕方は一意的ではない. したがって「 b と b_1, b_2 の関係を具体的に記述する」ためには, $B(\lambda)$ の元を一意的にパラメトライズする方法 (realization) が必要であり, ある realization を 1 つ選んだ時に初めて Problem 1 は意味を持つ.

1.2. $B(\lambda)$ の realization の中で一番有名なものは、おそらく $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ (A_n 型) の場合の半標準盤によるものであろう。 $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \Lambda_i \in P_+$ (Λ_i は i -th fundamental weight) として、 $\lambda_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ ($1 \leq i \leq n$) とおく。このとき $(\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \cdots \geq \lambda_1)$ は partition を定めるが、以後このように定義される partition を $\lambda \in P_+$ と同一視することにする。このとき次が知られている。

Theorem 1.2.1. $B(\lambda) \cong SST(\lambda)$ である。ただし $SST(\lambda)$ は $1, \dots, n, n+1$ を成分とする shape λ の半標準盤全体の集合を表す。

以後、この対応により $B(\lambda)$ と $SST(\lambda)$ を同一視して考える。

他のタイプでも通用する realization として多くの方法が知られている。例えば

- Young wall を用いる方法 (上の方法の一般の場合への拡張, Kang et al.),
- Lakshmibai-Seshadri path を用いる方法 (Littelmann),
- polyhedral realization (Zelevinsky-Nakashima),
- quiver variety の既約な Lagrangian subvariety を用いる方法 (Kashiwara-S)

など、挙げていけばきりが無い。

それぞれの realization には固有の「得意分野」のようなものがあり、「ある種の計算はこの realization と相性がよいが、別の計算をしようとするとなんが何だかわからなくなってしまふ」というようなことが往々にして起こる。したがって、種々の realization の間の対応を具体的に書き下すことは、時として非常に重要になることがある。

ここまでの話は非常に一般的で具体性を欠く、いわば「お題目」のような話であるけれど、頭の片隅にでも置いておいて頂ければ、後の話を理解して頂き易いのではないかと思う。

1.3. さて具体的な話に移ろう。 $\lambda, \mu \in P_+$ に対して、埋め込み

$$\Phi_{\lambda+\mu; \lambda, \mu} : B(\lambda + \mu) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\mu)$$

であって、

$$b_{\lambda+\mu} \mapsto b_\lambda \otimes b_\mu$$

となるものが一意に存在することはよく知られている。いま $b \in B(\lambda + \mu)$ に対し、

$$\Phi_{\lambda+\mu; \lambda, \mu}(b) = b_1 \otimes b_2 \quad (b_1 \in B(\lambda), b_2 \in B(\mu))$$

と書くことにして、以下のような問題を考えてみよう：

問題 : b と b_1, b_2 の関係を具体的に記述せよ。

この手の問題は realization を 1 つ fix しないとほとんど意味をなさない。実際、前節でも述べたように、Kashiwara operators を用いた表示：

$$b = \tilde{f}_{i_1} \tilde{f}_{i_2} \cdots \tilde{f}_{i_k} b_\lambda$$

では表示の一意性がないので、関係を具体的に記述しようとしてもどうしようもない。

一方、realization を 1 つ fix した場合には、これは具体的な問題として意味を持つ。例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ (A_n 型) で、半標準盤による realization を取った場合には、答えは次のように与えられる：

Proposition 1.3.1. crystal basis と半標準盤の同一視のもとに

$$B(\lambda + \mu) \ni b \leftrightarrow T \in SST(\lambda + \mu),$$

$$B(\lambda) \ni b_1 \leftrightarrow T_1 \in SST(\lambda), \quad B(\mu) \ni b_2 \leftrightarrow T_2 \in SST(\mu)$$

であったとする。このとき、

$$T = T_1 * T_2$$

である。ここに $T_1 * T_2$ は半標準盤の (Fulton の本 [F] の意味での) 積を表す。

Remark . これで一応「答」にはなっていると思うが、本当に「具体的な関係を記述した」ことになっているのかどうかは、いささか疑問が残る点もある．というのは、与えられた2つの半標準盤の積を計算するためには、bumping (もしくは jeu de taquin) と呼ばれる組合せ論的操作を実行しなければならず、それはそれで結構ややこしい。「そうとしか書きようがない」のだから仕方が無いとも言えるが、「explicit な対応がわかっている」というより、「explicit な対応を求めるためのアルゴリズムがわかっている」といった方が適切であろう．

1.4. この小論で紹介したいのは、前節で述べた問題の、

- (1) “Lusztig datum” による realization を取った場合の (部分的) 解答と、
- (2) “Mirković-Vilonen polytope” (以下 MV polytope と略記) による realization を取った場合の (部分的) 解答 (上記 (1) の応用として得られる)

である．

言葉の正確な定義は本文に譲ることとして、ここでは上記 (2) の“意味”について簡単に述べておきたい．Mirković-Vilonen は [MV1] において、Mirković-Vilonen cycle と呼ばれる、affine Grassmannian 中の代数的サイクルを導入した．正確な定義を述べようとするとき affine Grassmannian の幾何学や交叉コホモロジー等、大道具が必要となるのでここでは割愛するが、その後 Kamnitzer により、Mirković-Vilonen cycle の持つある種の幾何学的な情報を組合せ論的に翻訳した、Mirković-Vilonen polytope (MV polytope) なる概念が定式化された．これは実の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 中に描かれた凸多面体である．この凸多面体 (MV polytope) がどんな形をしているかは、一般にはなかなか難しい問題で、特殊な場合を除いては満足の得られる解答は無いように思う．この小論で紹介する上記 (2) は、MV polytope がどんな形をしているか? という問いに対する (完全ではないが) ある種の解答を与えている、ということになっている．

(注) このノートの執筆は斉藤が担当しました．本文中の記載の誤りはすべて斉藤の責任です．

2. PBW 型基底と LUSZTIG DATUM

2.1. $U_q = U_q(\mathfrak{g})$ の生成元を $e_i, f_i, k_i^{\pm 1}$ ($1 \leq i \leq n$) とし、 U_q の自己同型 T_i ($1 \leq i \leq n$) を次で定める：

$$T_i(e_j) = \begin{cases} -f_i k_i, & (i = j), \\ \sum_{k=0}^{-a_{i,j}} (-1)^{a_{i,j}+k} q_i^{a_{i,j}+k} e_i^{(k)} e_j e_i^{(-a_{i,j}-k)}, & (i \neq j), \end{cases}$$

$$T_i(f_j) = \begin{cases} -k_i^{-1} e_i, & (i = j), \\ \sum_{k=0}^{-a_{i,j}} (-1)^{a_{i,j}+k} q_i^{-a_{i,j}-k} f_i^{(-a_{i,j}-k)} f_j f_i^{(k)}, & (i \neq j), \end{cases}$$

$$T_i(k_j) = k_j k_i^{-a_{i,j}}.$$

ただし $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ は Cartan matrix, $q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)}$ ($1 \leq i \leq n$) . このとき次が知られている：

Lemma 2.1.1. T_i ($1 \leq i \leq n$) は braid relation を満たす．

w_0 を Weyl 群の longest element, $l(w_0) = N$ とし、 $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ を w_0 の reduced expression とする．この reduced word $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$ に対して、

$$P_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{c})} := f_{i_1}^{(c_1)} \left(T_{i_1} \left(f_{i_1}^{(c_2)} \right) \right) \cdots \left(T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{N-1}} \left(f_{i_N}^{(c_N)} \right) \right) \quad (\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N)$$

とおく．このとき次が知られている¹：

Proposition 2.1.2. (1) $B_{\mathbf{i}} := \{P_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{c})} \mid \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N\}$ は U_q^- の $\mathbb{Q}(q)$ -基底である (これを U_q^- の PBW 型基底と呼ぶ) ．

(2) $\mathcal{A} := \{f \in \mathbb{Q}(q) \mid f \text{ は } q = 0 \text{ で regular}\}$ とし、 $\mathcal{L}_{\mathbf{i}}$ を $B_{\mathbf{i}}$ で生成される U_q^- の \mathcal{A} -submodule

¹多少語弊はあるが基本的には Lusztig の結果と言うべきだと思う ([L2]) ．

とする．このとき \mathcal{L}_i は U_q^- の crystal lattice $L(\infty)$ に等しい．特に \mathcal{L}_i は reduced word \mathbf{i} の取り方に依らない．

(3) $B_i \bmod q\mathcal{L}_i$ は U_q^- の crystal basis $B(\infty)$ に等しい．特に $B_i \bmod q\mathcal{L}_i$ は reduced word \mathbf{i} の取り方に依らない．

この結果により 1 対 1 対応

$$\{\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N\} \leftrightarrow B(\infty)$$

が得られる． $b \in B(\infty)$ に対応する非負整数の組 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ を $b \in B(\infty)$ の i-Lusztig datum と呼ぶ．以下では $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ に対応する $B(\infty)$ の元を $b_{\mathbf{c}}$ と書くことにしよう．

2.2. Introduction で述べた問題を定式化するためには， $B(\infty)$ ではなく， $B(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$) の realization が必要となる．そのためにいくつか準備を行う．

* を次で定まる U_q の anti- $\mathbb{Q}(q)$ -algebra involution とする：

$$(e_i)^* = e_i, \quad (f_i)^* = f_i, \quad (k_i^{\pm 1})^* = k_i^{\mp 1}.$$

* が U_q^- の反自己同型であること，および $L(\infty)$ を保つことはすぐにわかるが，次は非自明な結果である．

Theorem 2.2.1 ([Kas]). $B(\infty)^* = B(\infty)$. すなわち * は $B(\infty)$ の permutation を誘導する．

$\lambda \in P_+$ とする． $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ とし， T_λ に対する crystal structure を

$$\text{wt}(t_\lambda) = \lambda, \quad \varepsilon_i(t_\lambda) = \varphi_i(t_\lambda) = -\infty, \quad \tilde{e}_i(t_\lambda) = \tilde{f}_i(t_\lambda) = 0$$

で定める．このとき crystal の埋め込み

$$\iota_\lambda : B(\lambda) \hookrightarrow B(\infty) \otimes T_\lambda, \quad b_\lambda \mapsto b_\infty \otimes t_\lambda$$

が一意的に存在する．ただし b_λ, b_∞ はそれぞれ $B(\lambda), B(\infty)$ の highest weight elements である．

以上の準備のもとに， $B(\lambda)$ の元のパラメトリゼーションは次のように与えられる：

Lemma 2.2.2 ([S]). $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \Lambda_i \in P_+$ とする (Λ_i ($1 \leq i \leq n$) は fundamental weights)．このとき $b_{\mathbf{c}} \otimes t_\lambda \in B(\infty) \otimes T_\lambda$ が $\iota_\lambda(B(\lambda))$ に含まれる必要十分条件は，

$$\varepsilon_i(b_{\mathbf{c}}^*) \leq m_i \quad (\text{for all } 1 \leq i \leq n). \quad (2.2.1)$$

すなわち，非負整数の組 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ であって，条件 (2.2.1) を満たすものの全体が $B(\lambda)$ をパラメトライズすることになる．したがって， $\varepsilon_i(b_{\mathbf{c}}^*)$ を Lusztig datum \mathbf{c} の言葉で書き下すことができれば， $B(\lambda)$ の元のパラメトリゼーションの explicit form が得られたことになる．一般に $\varepsilon_i(b_{\mathbf{c}}^*)$ を計算するのは難しいが， A_n 型で， w_0 の reduced word を特殊なものに選んだ場合には，その具体型が完全に決定出来る．次節ではこのことを紹介したい．

3. A_n 型の場合

3.1. 以下では w_0 の reduced expression として

$$w_0 = (s_1)(s_2 s_1)(s_3 s_2 s_1) \cdots (s_n s_{n-1} \cdots s_1)$$

を取った場合，すなわち reduced word

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^{(0)} &:= (i_1, \dots, i_N) \\ &= (1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1) \end{aligned}$$

とした場合を考える．この場合に限定すると，種々のデータの具体型が完全に決定出来る．statement を述べるために記号を導入しよう． $\mathbf{i}^{(0)}$ -Lusztig datum $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ を以下のように書き換える²：

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= c_1, \\ a_{1,3} &= c_2, \quad a_{2,3} = c_3, \\ a_{1,4} &= c_4, \quad a_{2,4} = c_5, \quad a_{3,4} = c_6, \\ &\vdots \\ a_{1,n+1} &= c_{N-(n-1)}, \quad a_{2,n+1} = c_{N-(n-2)}, \quad \dots, \quad a_{n-1,n+1} = c_{N-1}, \quad a_{n,n+1} = c_N \end{aligned}$$

Lemma 3.1.1. この記法の下に次が成り立つ． $qL(\infty)$ を法として

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{i}^{(0)}}^{(\mathbf{c})} &\equiv \tilde{f}_1^{a_{1,2}} \tilde{f}_2^{a_{1,3}+a_{2,3}} \tilde{f}_1^{a_{1,3}} \tilde{f}_3^{a_{1,4}+a_{2,4}+a_{3,4}} \tilde{f}_2^{a_{1,4}+a_{2,4}} \tilde{f}_1^{a_{1,4}} \dots \\ &\quad \times \tilde{f}_n^{a_{1,n+1}+a_{2,n+1}+\dots+a_{n,n+1}} \tilde{f}_{n-1}^{a_{1,n+1}+\dots+a_{n-1,n+1}} \dots \tilde{f}_2^{a_{1,n+1}+a_{2,n+1}} \tilde{f}_1^{a_{1,n+1}} b_\infty \end{aligned}$$

Remark . 一般の reduced word に対しての explicit formula に関しては，計算するアルゴリズムはあるのでやれば出来るはずだが，書き下したものがあるかどうかは知らない．

3.2. $a_{i,j}$ たちで書かれた $\mathbf{i}^{(0)}$ -Lusztig datum は次のようにまとめると便利である．

$$\mathbf{a} = \begin{array}{cccccc} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ & & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} & a_{3,n+1} \\ \mathbf{a} = & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{n-1,n} & a_{n-1,n+1} \\ & & & & & a_{n,n+1} \end{array}$$

対応する $B(\infty)$ の元を $b_{\mathbf{a}}$ ，対応する PBW basis を $P_{\mathbf{i}^{(0)}}^{(\mathbf{a})}$ と書くことにする．

$\{b_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N\} \cong B(\infty)$ に入っている crystal structure を $\mathbf{i}^{(0)}$ -Lusztig datum の言葉で書き直すと以下ようになる．記号を準備しよう． $1 \leq i \leq n$ に対し，

$$A_k^{(i)}(b_{\mathbf{a}}) := \sum_{l=1}^k (a_{l,i+1} - a_{l-1,i}) \quad (1 \leq k \leq i)$$

とおく．ただし $a_{0,i} = 0$ ．

Lemma 3.2.1. (1) $\text{wt}(b_{\mathbf{a}}) = -\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^i \sum_{l=i+1}^{n+1} a_{k,l} \right) \alpha_i$ ．

(2) $1 \leq i \leq n$ に対し，

$$\varepsilon_i(b_{\mathbf{a}}) = \max\{A_1^{(i)}(b_{\mathbf{a}}), \dots, A_i^{(i)}(b_{\mathbf{a}})\}, \quad \varphi_i(b_{\mathbf{a}}) = \varepsilon_i(b_{\mathbf{a}}) + \langle \text{wt}(b_{\mathbf{a}}), h_i \rangle.$$

(3) \tilde{e}_i の作用： $\varepsilon_i(b_{\mathbf{a}})$ の値で場合分けが起こる．

(i) $\varepsilon_i(b_{\mathbf{a}}) = 0$ のとき： $\tilde{e}_i(b_{\mathbf{a}}) = 0$ ．

(ii) $\varepsilon_i(b_{\mathbf{a}}) > 0$ のとき： $b_{\mathbf{a}'} = \tilde{e}_i(b_{\mathbf{a}})$ とすると， $\mathbf{a}' = (a'_{i,j})$ は次で与えられる非負整数の組．

$\varepsilon_i(b_{\mathbf{a}}) = A_k^{(i)}(b_{\mathbf{a}})$ となる $1 \leq k \leq i$ のうち最小の k を k_e とする．このとき

$$a'_{k_e,i} = a_{k_e,i} + 1, \quad a'_{k_e,i+1} = a_{k_e,i+1} - 1.$$

それ以外の添字の部分に関しては

$$a'_{k,l} = a_{k,l}.$$

²これはオリジナルの $\mathbf{i}^{(0)}$ -Lusztig datum $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)$ の添字の付け方を変えただけであることに注意されたい．

ただし $k_e = i$ の場合は ($a_{i,i}$ なる数は存在しないので)

$$a'_{i,i+1} = a_{i,i+1} - 1, \quad a'_{k,l} = a_{k,l} \quad (\text{それ以外}).$$

(4) \tilde{f}_i の作用: $b_{a''} = \tilde{f}_i(b_a)$ とすると, $a'' = (a''_{i,j})$ は次で与えられる非負整数の組. $\varepsilon_i(b_a) = A_k^{(i)}(b_a)$ となる $1 \leq k \leq i$ のうち最大の k を k_f とする. このとき

$$a''_{k_f,i} = a_{k_f,i} - 1, \quad a''_{k_f,i+1} = a_{k_f,i+1} + 1.$$

それ以外の添字の部分に関しては

$$a''_{k,l} = a_{k,l}.$$

ただし $k_f = i$ の場合は ($a_{i,i}$ なる数は存在しないので)

$$a''_{i,i+1} = a_{i,i+1} + 1, \quad a''_{k,l} = a_{k,l} \quad (\text{それ以外}).$$

Remark. この結果は 90 年代前半辺りから専門家の間では知られていたが, 出版されたものでは Reineke [R] が最初といって良い. その後 Savage [Sa] による解説も publish されている.

Example 3.2.2.

$$\mathbf{a} = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{array} \quad (n=3) \quad \text{で, } i=3 \text{ の場合:}$$

$$A_1^{(3)}(b_a) = 1, \quad A_2^{(3)}(b_a) = 1 + (1 - 1) = 1, \quad A_3^{(3)}(b_a) = 1 + (1 - 1) + (1 - 2) = 0.$$

よって $\varepsilon_3(b_a) = 1$, $k_e = 1$, $k_f = 2$. したがって $b_{a'} = \tilde{e}_3(b_a)$, $b_{a''} = \tilde{f}_3(b_a)$ として

$$\mathbf{a}' = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{array}, \quad \mathbf{a}'' = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{array}.$$

3.3. $B(\infty)$ に通常のものとは別の crystal structure (*-crystal structure) を入れる. まず一般論で話を始めよう. *-version の Kashiwara operators を以下で定義する:

$$\tilde{e}_i^* := * \circ \tilde{e}_i \circ *, \quad \tilde{f}_i^* := * \circ \tilde{f}_i \circ *.$$

もともと $*$ は involution であったので, 任意の $b \in B(\infty)$ に対し,

$$\tilde{e}_i^* b^* = (\tilde{e}_i b)^*, \quad \tilde{f}_i^* b^* = (\tilde{f}_i b)^*$$

が成り立つ. また $*$ の定義から

$$\text{wt}(b^*) = \text{wt}(b)$$

も明らかであろう. したがって $b \in B(\infty)$ に対し,

$$\varepsilon_i^*(b) := \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid (\tilde{e}_i^*)^k b \neq 0\}, \quad \varphi_i^*(b) := \varepsilon_i(b^*) + \langle \text{wt}(b^*), h_i \rangle$$

とおけば,

$$\varepsilon_i^*(b) = \varepsilon_i(b^*), \quad \varphi_i^*(b) = \varphi_i(b^*)$$

である. このとき組 $(B(\infty), \text{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \tilde{e}_i^*, \tilde{f}_i^*)$ は crystal の公理を満たすことが容易にわかる. 言い方を換えれば $\text{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \tilde{e}_i^*, \tilde{f}_i^*$ によって, $B(\infty)$ にオリジナルのものとは別の crystal structure が入っていることになる.

話を A_n 型に限定すると, 新しく定めた *-crystal structure についても $\mathbf{i}^{(0)}$ -Lusztig datum を用いた explicit formula が計算出来る³. まず記号の準備から始める. $1 \leq i \leq n$ に対し,

$$A_k^{*(i)}(b_a) := \sum_{l=k+1}^{n+1} (a_{i,l} - a_{i+1,l+1}) \quad (i \leq k \leq n)$$

³こちらについても専門家の間では以前から知られていたが, 実際に出版されたものは無いように思う.

とおく . ただし $a_{i+1, n+2} = 0$.

Lemma 3.3.1. (1) $\text{wt}(b_{\mathbf{a}}^*) = \text{wt}(b_{\mathbf{a}})$.

(2) $1 \leq i \leq n$ に対し ,

$$\varepsilon_i^*(b_{\mathbf{a}}) = \max\{A_i^{*(i)}(b_{\mathbf{a}}), \dots, A_n^{*(i)}(b_{\mathbf{a}})\}, \quad \varphi_i^*(b_{\mathbf{a}}) = \varepsilon_i^*(b_{\mathbf{a}}) + \langle \text{wt}(b_{\mathbf{a}}), h_i \rangle.$$

(3) \tilde{e}_i^* の作用 : $\varepsilon_i^*(b_{\mathbf{a}})$ の値で場合分けが起こる .

(i) $\varepsilon_i^*(b_{\mathbf{a}}) = 0$ のとき : $\tilde{e}_i^*(b_{\mathbf{a}}) = 0$.

(ii) $\varepsilon_i^*(b_{\mathbf{a}}) > 0$ のとき : $b_{\mathbf{a}'} = \tilde{e}_i^*(b_{\mathbf{a}})$ とすると , $\mathbf{a}' = (a'_{i,j})$ は次で与えられる非負整数の組 .

$\varepsilon_i^*(b_{\mathbf{a}}) = A_k^{*(i)}(b_{\mathbf{a}})$ となる $i \leq k \leq n$ のうち最大の k を k_e^* とする . このとき

$$a'_{i, k_e^*+1} = a_{i, k_e^*+1} - 1, \quad a'_{i+1, k_e^*+1} = a_{i+1, k_e^*+1} + 1.$$

それ以外の添字の部分に関しては

$$a'_{k,l} = a_{k,l}.$$

ただし $k_e^* = i$ の場合は ($a_{i+1, i+1}$ なる数は存在しないので)

$$a'_{i, i+1} = a_{i, i+1} - 1, \quad a'_{k,l} = a_{k,l} \quad (\text{それ以外}).$$

(4) \tilde{f}_i^* の作用 : $b_{\mathbf{a}''} = \tilde{f}_i^*(b_{\mathbf{a}})$ とすると , $\mathbf{a}'' = (a''_{i,j})$ は次で与えられる非負整数の組 .

$\varepsilon_i^*(b_{\mathbf{a}}) = A_k^{*(i)}(b_{\mathbf{a}})$ となる $i \leq k \leq n$ のうち最小の k を k_f^* とする . このとき

$$a''_{i, k_f^*+1} = a_{i, k_f^*+1} + 1, \quad a''_{i+1, k_f^*+1} = a_{i+1, k_f^*+1} - 1.$$

それ以外の添字の部分に関しては

$$a''_{k,l} = a_{k,l}.$$

ただし $k_f^* = i$ の場合は ($a_{i+1, i+1}$ なる数は存在しないので)

$$a''_{i, i+1} = a_{i, i+1} + 1, \quad a''_{k,l} = a_{k,l} \quad (\text{それ以外}).$$

したがって $B(\lambda)$ ($\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \Lambda_i \in P_+$) の元の $\mathbf{i}^{(0)}$ -Lusztig datum によるパラメトリゼーションは , 次のように与えられる :

Corollary 3.3.2.

$$B(\lambda) \cong \left\{ \mathbf{a} = (a_{i,j}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \mid \max\{A_i^{*(i)}(b_{\mathbf{a}}), \dots, A_n^{*(i)}(b_{\mathbf{a}})\} \leq m_i \text{ for all } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

3.4. 他方 , Introduction でも述べたように , $B(\lambda)$ ($\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \Lambda_i \in P_+$) は半標準盤によって realize することもできる . 以後 $b \in B(\lambda)$ と対応する半標準盤を同一視することにして「半標準盤 $b \in B(\lambda)$ 」などと書くことにする .

半標準盤による表示と前節で述べた $\mathbf{i}^{(0)}$ -Lusztig datum によるパラメトリゼーションの関係については , 次の公式が知られている :

Proposition 3.4.1. 半標準盤 $b \in B(\lambda)$ に対し , 対応する $\mathbf{i}^{(0)}$ -Lusztig datum が \mathbf{a} であったとする . すなわち

$$b_{\mathbf{a}} \otimes t_{\lambda} = t_{\lambda}(b)$$

とする . このとき

$$a_{i,j} = \text{半標準盤 } b \text{ の } i \text{ 行目に現れる文字 } j \text{ の数}.$$

Example 3.4.2. A_5 型 , $\lambda = \Lambda_2 + 3\Lambda_3 + 3\Lambda_4 + 2\Lambda_5$.

$$b = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & & & & \\ \hline 6 & 6 & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

o b の $i^{(0)}$ -Lusztig datum

$$\mathbf{a} = \begin{array}{cccccc} & & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 3 & 1 & 1 \\ & & & & 2 & 2 & 2 \\ & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & 2 \end{array}$$

$$\varepsilon_1^*(\mathbf{a}) = 0, \quad \varepsilon_2^*(\mathbf{a}) = 1, \quad \varepsilon_3^*(\mathbf{a}) = 3, \quad \varepsilon_4^*(\mathbf{a}) = 2 \leq 3, \quad \varepsilon_5^*(\mathbf{a}) = 2$$

4. 問題に対する部分的な解答

4.1. 考える問題を再確認しておこう. 与えられた dominant integral weight $\lambda \in P_+$ を2つの dominant integral weight の和に分割する:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in P_+).$$

このとき crystal の埋め込み

$$\Phi_{\lambda; \lambda_1, \lambda_2} : B(\lambda) \hookrightarrow B(\lambda_1) \otimes B(\lambda_2), \quad b_\lambda \mapsto b_{\lambda_1} \otimes b_{\lambda_2}$$

が一意的に存在する.

問題 :

$$\Phi_{\lambda; \lambda_1, \lambda_2}(b) = b_1 \otimes b_2 \quad (b \in B(\lambda), b_1 \in B(\lambda_1), b_2 \in B(\lambda_2))$$

であるとき, b と b_1, b_2 の関係を具体的に記述せよ.

4.2. 以下では $i^{(0)}$ -Lusztig datum による realization を取った場合の, 上記の問題に対する解答を与える. ただし, λ に対して勝手な分割を考えると問題が難しくなりすぎるので, ここでは次のような特殊な分割に制限して話を進める.

与えられた dominant integral weight $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \Lambda_i$ とする. $1 \leq s \leq n$ なる s を固定し, m_s を非負整数の和に分ける:

$$m_s = m_{s,L} + m_{s,R}. \tag{4.2.1}$$

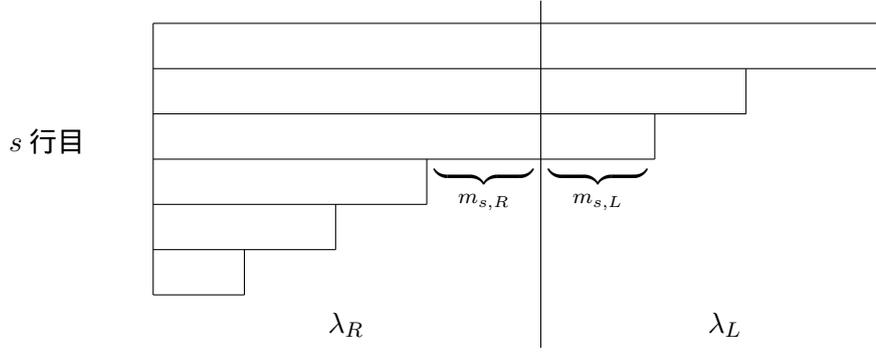
さらに λ_L, λ_R を次のように定める:

$$\lambda_L := \sum_{i=1}^{s-1} m_i \Lambda_i + m_{s,L} \Lambda_s, \quad \lambda_R := m_{s,R} \Lambda_s + \sum_{i=s+1}^n m_i \Lambda_i. \tag{4.2.2}$$

このとき

$$\lambda = \lambda_L + \lambda_R$$

である. これは shape λ の Young 図形を次のように分割することに他ならない:



対応する crystal の埋め込みを

$$\Phi_{\lambda; \lambda_L, \lambda_R} : B(\lambda) \hookrightarrow B(\lambda_L) \otimes B(\lambda_R)$$

とする . shape λ の半標準盤 $b \in B(\lambda)$ に対し , $b_L \in B(\lambda_L)$, $b_R \in B(\lambda_R)$ を次で定める :

$$\Phi_{\lambda; \lambda_L, \lambda_R}(b) = b_L \otimes b_R.$$

このとき shape λ の半標準盤の集合と $B(\lambda)$ の同一視の仕方から次がわかる .

Lemma 4.2.1. $b_L \in B(\lambda_L)$ は , 半標準盤 $b \in B(\lambda)$ を上図の縦線で 2 つに分けたとき右側に現れる半標準盤に等しい . 同様に , $b_R \in B(\lambda_R)$ は , 半標準盤 $b \in B(\lambda)$ を上図の縦線で 2 つに分けたとき左側に現れる半標準盤に等しい .

Proof. $1, \dots, n, n+1$ を成分とする shape λ の半標準盤の集合と $B(\lambda)$ の同一視の仕方は次のようなものだった :

$$\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \Lambda_i$$

$$\lambda = \Lambda_{i_1} + \dots + \Lambda_{i_t} \quad (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_t \leq n)$$

と表示して , 埋め込み

$$\Phi_{\lambda; \Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_t}} : B(\lambda) \hookrightarrow B(\Lambda_{i_1}) \otimes \dots \otimes B(\Lambda_{i_t})$$

を考える . 各 $B(\Lambda_{i_k})$ はタテ 1 列で , $1, \dots, n, n+1$ を成分とする深さが i_k の (半) 標準盤の全体の集合である . この埋め込みによる $B(\lambda)$ の像が shape λ の半標準盤だった .

$$t_L := m_1 + \dots + m_{s-1} + m_{s,L} \quad (t_R := t - t_L = m_{s,R} + m_{s+1} + \dots + m_n)$$

とおく . 構成から次の図式は可換 :

$$\begin{array}{ccc} B(\lambda) & \longrightarrow & B(\Lambda_{i_1}) \otimes \dots \otimes B(\Lambda_{i_t}) \\ \downarrow & & \parallel \\ B(\lambda_L) \otimes B(\lambda_R) & \longrightarrow & (B(\Lambda_{i_1}) \otimes \dots \otimes B(\Lambda_{i_{t_L}})) \otimes (B(\Lambda_{i_{t_L}+1}) \otimes \dots \otimes B(\Lambda_{i_t})) \end{array}$$

このことから主張は従う . □

分割された半標準盤 λ_L, λ_R に対し , 対応する $\mathbf{i}^{(0)}$ -Lusztig datum を $\mathbf{a}_L, \mathbf{a}_R$ と書く . Proposition 3.4.1 から次が従う .

Corollary 4.2.2.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_L + \mathbf{a}_R.$$

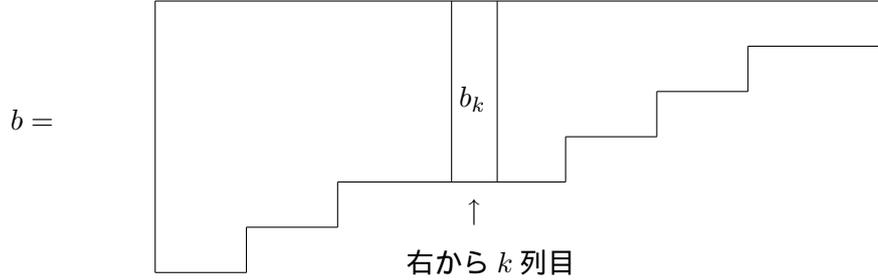
ただし , 右辺は成分毎の和を意味する .

これで 4.1 節で述べた問題に対する解答が得られたことになる .

4.3. 前節の話はもう少し一般化することができる．半標準盤 $b \in B(\lambda)$ に対して，右から k 列目のタテ 1 列の Young 図形の中にどういう数字が書き込まれているかを， $i^{(0)}$ -Lusztig datum $\mathbf{a} = (a_{i,j})$ の言葉で記述する．右から k 列目のタテ 1 列の (半) 標準盤を b_k と書く． k の動く範囲は

$$1 \leq k \leq \lambda_1 = \sum_{i=1}^n m_i = t$$

である．



b_k の上から i 番目のハコに書かれた文字を $d_{i,k}$ したとき， $d_{i,k}$ を $i^{(0)}$ -Lusztig datum の言葉で書いてみよう．右から k 列目ということは，左から $\lambda_1 - k + 1$ 列目であることに他ならない．これに注意すると，

$$d_{i,k} = \min\{l \geq i \mid \lambda_1 - k + 1 \leq a_{i,i} + \cdots + a_{i,l}\}$$

であることがわかる．ここに $a_{i,i}$ は b の第 i 行目に書かれた文字 i の数である． $a_{i,i}$ は $i^{(0)}$ -Lusztig datum には含まれていない ($i^{(0)}$ -Lusztig datum に現れるのは $a_{i,j}$ ($i < j$)!) ので，さらに書き直す必要がある． $\lambda_1 = \sum_{j=1}^n m_j$ を用いて右辺の中括弧の中身を書き換えると

$$k \geq 1 + \sum_{j=1}^n m_j - \sum_{j=i}^l a_{i,j} \quad (4.3.1).$$

b の i 行目にあるハコのは数は

$$\sum_{j=i}^n m_j = \sum_{j=i}^{n+1} a_{i,j}$$

であるので，

$$\begin{aligned} (4.3.1) \text{ の右辺} &= 1 + \sum_{j=1}^n m_j - \sum_{j=i}^l a_{i,j} - \sum_{j=i}^n m_j + \sum_{j=i}^{n+1} a_{i,j} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{i-1} m_j + \sum_{j=l+1}^{n+1} a_{i,j}. \end{aligned}$$

以上まとめて次を得る：

Lemma 4.3.1.

$$d_{i,k} = \min \left\{ l \geq i \mid k \geq 1 + \sum_{j=1}^{i-1} m_j + \sum_{j=l+1}^{n+1} a_{i,j} \right\}.$$

タテ 1 列の半標準盤 b_k に対応する $i^{(0)}$ -Lusztig datum を $\mathbf{a}_k = (a_{i,j}^k)$ と書こう．半標準盤と $i^{(0)}$ -Lusztig datum の対応関係から次がわかる．

Lemma 4.3.2. $1 \leq i \leq n$ に対し,

$$a_{i,j}^k = \begin{cases} 1 & (j = d_{i,k}), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

b_k に対応する $i^{(0)}$ -Lusztig datum $\mathbf{a}_k = (a_{i,j}^k)$ は各行, 各列に高々 1 個 1 があり, 残りは全部 0 であるようなものである. さらに,

$$d_{1,k} < d_{2,k} < \cdots$$

であることから, 1 が現れる場所は, 左上から右下に向かって斜めに並ぶ.

構成から次も明らかであろう.

Proposition 4.3.3.

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^t \mathbf{a}_k.$$

すなわち, 半標準盤をタテに割るような分割に対しては, $i^{(0)}$ -Lusztig datum の線形性が成り立つ.

4.4. 具体例を見てみよう. Example 3.4.2 を思い出そう. この場合 A_5 型で, $\lambda = \Lambda_2 + 3\Lambda_3 + 3\Lambda_4 + 2\Lambda_5$ であった. また $b \in B(\lambda)$ は次のように与えられていた:

$$b = \begin{array}{ccccccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{4} & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{6} & \boxed{6} \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{5} & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{b_4} & \boxed{b_3} & \boxed{b_2} & \\ \boxed{6} & \boxed{6} & \boxed{b_7} & \boxed{b_6} & \boxed{b_5} & & & & \\ & & \boxed{b_9} & \boxed{b_8} & & & & & \end{array}$$

対応する $i^{(0)}$ -Lusztig datum は

$$\mathbf{a} = \begin{array}{cccccc} & & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 3 & 1 & 1 \\ \mathbf{a} = & & & & 2 & 2 & 2 \\ & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & 2 \end{array}$$

b の各列 b_k に対応する半標準盤の $i^{(0)}$ -Lusztig datum は次の通り⁴:

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & \end{array} \\ \mathbf{a}_2 = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & \end{array} \\ \mathbf{a}_3 = \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & \end{array} \\ \mathbf{a}_4 = \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & \end{array} \\ \mathbf{a}_5 = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \end{array} \\ \mathbf{a}_6 = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & \end{array} \end{array}$$

⁴ b の $i^{(0)}$ -Lusztig datum を経由して計算することも出来るが, 半標準盤の表示から直接計算してしまった方が圧倒的に簡単.

$$\mathbf{a}_7 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 \end{matrix} \quad \mathbf{a}_8 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{a}_9 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 1 \end{matrix}$$

もちろん

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_9$$

となっている .

4.5. $i^{(0)}$ -Lusztig datum の線形性が成り立つには , 上で考えたような “縦割りの分割” でないとダメではないかと思う . 話がうまくいく key point は可換図式

$$\begin{array}{ccc} B(\lambda) & \longrightarrow & B(\Lambda_{i_1}) \otimes \cdots \otimes B(\Lambda_{i_t}) \\ \downarrow & & \parallel \\ B(\lambda_L) \otimes B(\lambda_R) & \longrightarrow & (B(\Lambda_{i_1}) \otimes \cdots \otimes B(\Lambda_{i_{t_L}})) \otimes (B(\Lambda_{i_{t_L+1}}) \otimes \cdots \otimes B(\Lambda_{i_t})) \end{array}$$

にある . 右辺のタテの等号は (tensor 積の順序は変えずに) 括弧の位置を付け替えているだけなので , この場合には当然 OK .

縦割りの分割でないとうなるかを考えてみる . 例えば A_2 型で

$$\lambda = 2\Lambda_1 + 2\Lambda_2, \quad \lambda_L = \lambda_R = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

の場合を考えよう . 上の可換図式の 1 行目にあたる埋め込みは ,

$$B(2\Lambda_1 + 2\Lambda_2) \hookrightarrow B(\Lambda_1) \otimes B(\Lambda_1) \otimes B(\Lambda_2) \otimes B(\Lambda_2)$$

である . 一方 2 行目は

$$B(\Lambda_1 + \Lambda_2) \otimes B(\Lambda_1 + \Lambda_2) \hookrightarrow (B(\Lambda_1) \otimes B(\Lambda_2)) \otimes (B(\Lambda_1) \otimes B(\Lambda_2))$$

となる . 両者の右辺は同型ではあるけれど , tensor 積の第 2 成分と第 3 成分を入れ替えなければならないので , 間に R -matrix を挟まなければならない .

$$R_{23} : B(\Lambda_1) \otimes B(\Lambda_1) \otimes B(\Lambda_2) \otimes B(\Lambda_2) \xrightarrow{\sim} B(\Lambda_1) \otimes B(\Lambda_2) \otimes B(\Lambda_1) \otimes B(\Lambda_2).$$

半標準盤の情報と , R -matrix の間のきれいな関係があればよいが , そういうことはあまり期待出来ない . 線形性のようなきれいな関係は一般には期待出来ない .

実際 $\lambda = 2\Lambda_1 + 2\Lambda_2, \lambda_L = \lambda_R = \Lambda_1 + \Lambda_2$ の場合には , A_2 の Weyl 群の longest element の reduced expression を $(1, 2, 1)$ に取っても $(2, 1, 2)$ に取っても , 対応する Lusztig datum の線形性は成り立たない .

4.6. これまでの議論で $b \in B(\lambda)$ と $b_L \in B(\lambda_L), b_R \in B(\lambda_R)$ の具体的な関係が明らかになった (Corollary 4.2.2) わけだが , 「明示公式を得る」という観点からすれば , いささか不十分な点もある . 与えられた $b \in B(\lambda)$ の $i^{(0)}$ -Lusztig datum \mathbf{a} に対し , 対応する $b_L \in B(\lambda_L), b_R \in B(\lambda_R)$ の $i^{(0)}$ -Lusztig datum $\mathbf{a}_L, \mathbf{a}_R$ を求めるためには半標準盤による表示を経由しなければならず , その意味からすれば 「アルゴリズムが求まった」というべきであろう . 本節ではさらに話を進めて , 与えられた \mathbf{a} から \mathbf{a}_L および \mathbf{a}_R を具体的に求める明示公式について考えたい . 本来であれば 4.2 節で考えたような

$$\lambda = \lambda_L + \lambda_R$$

なる分割の一般形に対して解答を与えるべきところであるが , 話はそこまで出来ていないので ,

$$\lambda_L = \sum_{i=1}^s m_i \Lambda_i, \quad \lambda_R = \sum_{i=s+1}^n m_i \Lambda_i$$

の場合に限定して話を進める⁵。

crystal の埋め込み

$$\begin{aligned}\Theta_{\lambda; \lambda_L, \lambda_R} : B(\infty) \otimes T_\lambda &\hookrightarrow (B(\infty) \otimes T_{\lambda_L}) \otimes (B(\infty) \otimes T_{\lambda_R}), \\ b_\infty \otimes t_\lambda &\mapsto (b_\infty \otimes t_{\lambda_L}) \otimes (b_\infty \otimes t_{\lambda_R})\end{aligned}$$

を考える．構成から

$$\Theta_{\lambda; \lambda_L, \lambda_R}(b_{\mathbf{a}} \otimes t_\lambda) = (b_{\mathbf{a}_L} \otimes t_{\lambda_L}) \otimes (b_{\mathbf{a}_R} \otimes t_{\lambda_R})$$

となっていることに注意しよう． $\mathbf{a} = (a_{i,j})$ として

$$\begin{aligned}b_{\mathbf{a}} &= \tilde{f}_1^{a_{1,2}} \tilde{f}_2^{a_{1,3}+a_{2,3}} \tilde{f}_1^{a_{1,3}} \tilde{f}_3^{a_{1,4}+a_{2,4}+a_{3,4}} \tilde{f}_2^{a_{1,4}+a_{2,4}} \tilde{f}_1^{a_{1,4}} \dots \\ &\quad \times \tilde{f}_n^{a_{1,n+1}+a_{2,n+1}+\dots+a_{n,n+1}} \tilde{f}_{n-1}^{a_{1,n+1}+\dots+a_{n-1,n+1}} \dots \tilde{f}_2^{a_{1,n+1}+a_{2,n+1}} \tilde{f}_1^{a_{1,n+1}} b_\infty\end{aligned}$$

であったので，このことと $\Theta_{\lambda; \lambda_L, \lambda_R}$ が crystal の射であることを用いれば，

$$\begin{aligned}&\tilde{f}_1^{a_{1,2}} \tilde{f}_2^{a_{1,3}+a_{2,3}} \tilde{f}_1^{a_{1,3}} \tilde{f}_3^{a_{1,4}+a_{2,4}+a_{3,4}} \tilde{f}_2^{a_{1,4}+a_{2,4}} \tilde{f}_1^{a_{1,4}} \dots \\ &\quad \times \tilde{f}_n^{a_{1,n+1}+a_{2,n+1}+\dots+a_{n,n+1}} \tilde{f}_{n-1}^{a_{1,n+1}+\dots+a_{n-1,n+1}} \dots \\ &\quad \times \tilde{f}_2^{a_{1,n+1}+a_{2,n+1}} \tilde{f}_1^{a_{1,n+1}} ((b_\infty \otimes t_{\lambda_L}) \otimes (b_\infty \otimes t_{\lambda_R}))\end{aligned}$$

を計算することで， $b_{\mathbf{a}_L}$ ， $b_{\mathbf{a}_R}$ の具体型（すなわち \mathbf{a}_L ， \mathbf{a}_R の具体型）を求めることができる．

記号を準備しよう．与えられた $\mathbf{a} = (a_{i,j})$ と $1 \leq s \leq n$ に対し， $\tilde{b}_{i,j}, b_{i,j}$ ($1 \leq i \leq s$, $i+1 \leq j \leq i+n-s$) を次のように定める：

$$\tilde{b}_{i,j} := m_i - \left(\sum_{k=0}^{s-i} (a_{i,n+1-k} - a_{i+1,n+2-k}) + \sum_{k=s-i+1}^{n-j} (b_{i,n+1-k} - b_{i+1,n+2-k}) \right) + b_{i+1,j+1},$$

$$b_{i,j} := \min \{ \tilde{b}_{i,j}, a_{i,j} \}.$$

ただし， $a_{i+1,n+2} := 0$ ， $b_{s+1,r} := 0$ ($s+2 \leq r \leq n+1$) と定める．

これで与えられたデータから $\tilde{b}_{i,j}, b_{i,j}$ が一意に定まるのだが，少々見にくいので説明が必要であろう． $\tilde{b}_{i,j}$ の定義式を見よう．右辺に現れる文字のうち，問題なのは $b_{u,v}$ たちである．添字の範囲をよくみると，右辺には第2の添字が j より真に大きいものしか現れない．すなわち $b_{u,v}$ であって， $v > j$ なるものたちが定まっていれば， $\tilde{b}_{i,j}, b_{i,j}$ も与えられたデータから一意に定まる．

そこで第2の添字が最も大きくなる場合，すなわち $j = n$ の場合を考える．この場合，添字の動く範囲が $1 \leq i \leq s$ ， $i+1 \leq j \leq i+n-s$ であることから， $i = s$ に限られる．したがって上式は

$$\tilde{b}_{s,n} = m_s - a_{s,n+1}, \quad b_{s,n} = \min \{ \tilde{b}_{s,n}, a_{s,n} \}$$

となり， $\tilde{b}_{s,n}, b_{s,n}$ は与えられたデータから一意に定まる．

後は第2の添字に現れる文字が減っていく方向にしたがって， $\tilde{b}_{i,j}$ および $b_{i,j}$ が帰納的に決まっていく，という仕組みになっている．

以上の準備の下に計算結果をまとめると次のようになる．

⁵これは (4.2.1) で， $m_{s,L} = m_s, m_{s,R} = 0$ とした場合に対応する．単にさぼっているというだけで，一般化することはさして難しいことではない（はずである）．

Proposition 4.6.1. $\mathbf{a}_L = (a_{i,j}^L)$ として, 各 $a_{i,j}^L$ ($1 \leq i < j \leq n+1$) の具体型は,

$$a_{i,j}^L = \begin{cases} b_{i,j} & (1 \leq i \leq s, i+1 \leq j \leq i+n-s), \\ a_{i,j} & (1 \leq i \leq s, i+n-s+1 \leq j \leq n+1), \\ 0 & (s+1 \leq i \leq n). \end{cases}$$

また

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a} - \mathbf{a}_L \quad (\text{成分ごとの引き算}).$$

図式的に書けば, 次のようになる:

$$\mathbf{a}_L = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-s} \quad \overbrace{\hspace{2cm}}^s \\ \left. \begin{array}{l} \begin{array}{c} b_{i,j} \quad a_{i,j} \\ \hline 0 \end{array} \right\} s \\ \left. \right\} n-s \end{array} \end{array} \end{array}$$

5. MV POLYTOPE への応用

5.1. まず MV polytope を定義しよう. MV polytope の一般論は Kamnitzer [K1] による. 詳しくは原論文を参照されたい. MV polytope の理論は一般の \mathbb{C} 上の半単純リー代数に対して作られているが, ここでは A_n 型に限定して話を進めることにする.

$\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ を fundamental weights, $W = \mathfrak{S}_{n+1}$ を Weyl 群として,

$$\Gamma := \bigcup_{w \in W, 1 \leq i \leq n} w\Lambda_i$$

とおき, $\gamma \in \Gamma$ を chamber weight と呼ぶ. chamber weights でパラメトライズされた整数の組

$$M_\bullet := (M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \quad (M_\gamma \in \mathbb{Z})$$

対して, $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ 内の polytope

$$P(M_\bullet) := \{\alpha \in \mathfrak{h}_\mathbb{R} \mid \langle \alpha, \gamma \rangle \geq M_\gamma \text{ for all } \gamma \in \Gamma\}$$

を考える.

Definition 5.1.1. 整数の組 $M_\bullet = (M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ に対応する polytope $P(M_\bullet)$ が pseudo-Weyl polytope であるとは, 不等式

$$M_{ws_i\Lambda_i} + M_{w\Lambda_i} + \sum_{j \neq i} a_{j,i} M_{w\Lambda_j} \leq 0 \quad (\forall w \in W, 1 \leq i \leq n) \quad (5.1.1)$$

を満たすことをいう. ただし $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ は Cartan 行列である. また, 不等式 (5.1.1) を edge inequality と呼ぶ.

Proposition 5.1.2 ([K1]). $P(M_\bullet)$ が pseudo-Weyl polytope であるとき, $P(M_\bullet)$ の頂点は

$$\mu_w := \sum_{i=1}^n M_{w\Lambda_i} w\alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}_\mathbb{R} \quad (w \in W)$$

で与えられる. ここに α_i^\vee ($1 \leq i \leq n$) は simple coroot である. すなわち, $P(M_\bullet)$ は $\mu_\bullet := (\mu_w)_{w \in W}$ の convex hull である.

Definition 5.1.3. $\mu_\bullet := (\mu_w)_{w \in W}$ を pseudo-Weyl polytope $P(M_\bullet)$ の GGMS datum と呼ぶ .

Definition 5.1.4. 整数の組 $M_\bullet = (M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ が Berenstein-Zelevinsky datum (BZ datum) であるとは , edge inequality (5.1.1) および ,

関係式 : $a_{i,j} = a_{j,i} = -1$ かつ $ws_i > w, ws_j > w$ のとき

$$M_{ws_i \Lambda_i} + M_{ws_j \Lambda_j} = \min\{M_{w \Lambda_i} + M_{ws_i s_j \Lambda_j}, M_{ws_j s_i \Lambda_i} + M_{w \Lambda_j}\} \quad (5.1.2)$$

を満たすことをいう . ただし $>$ は Bruhat order である . また , 関係式 (5.1.2) を tropical Plücker relation と呼ぶ . M_\bullet が BZ datum であるとき , 対応する polytope $P(M_\bullet)$ を Mirković-Vilonen polytope (MV polytope) と呼ぶ .

Remark . $P(M_\bullet)$ が MV polytope であれば , edge inequality (5.1.1) を満たしているので pseudo-Weyl polytope でもある .

次の結果は crystal basis の MV polytope による実現を与えている .

Theorem 5.1.5 ([K1]). \mathcal{P} を MV polytope であって , $\mu_{w_0} = 0$ を満たすようなもの全体の集合とする . このとき \mathcal{P} は crystal structure を持ち , crystal として $U_q^-(\mathfrak{sl}_{n+1})$ の crystal basis $B(\infty)$ と同型である⁶ .

5.2. MV polytope と Lusztig datum の関係について知られていることを述べておく . $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$ を W の longest element w_0 の reduced word とし ,

$$w_k^{\mathbf{i}} := s_{i_1} \cdots s_{i_k} \quad (1 \leq k \leq N)$$

とおく .

Proposition 5.2.1 ([K1]). Theorem 5.1.5 の同型 $\mathcal{P} \cong B(\infty)$ によって両者を同一視する . このとき , $P(M_\bullet) \in \mathcal{P}$ に対し ,

$$c_k := -M_{w_{k-1}^{\mathbf{i}} \Lambda_{i_k}} - M_{w_k^{\mathbf{i}} \Lambda_{i_k}} - \sum_{j \neq i_k} a_{j,i_k} M_{w_k^{\mathbf{i}} \Lambda_j} \quad (1 \leq k \leq N) \quad (5.2.1)$$

とおくと⁷ , $\mathbf{c} := (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ は $P(M_\bullet) \in \mathcal{P} \cong B(\infty)$ の \mathbf{i} -Lusztig datum を与える .

つまり , BZ datum $M_\bullet = (M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ は , w_0 の ($\mathbf{i}^{(0)}$ のような特定の reduced word だけでなく) 任意の reduced word \mathbf{i} に対する \mathbf{i} -Lusztig datum の情報を “明示的に” 全て知っているわけである . 以後 , (5.2.1) によって定まる $P(M_\bullet)$ の \mathbf{i} -Lusztig datum を

$$\mathbf{i}\text{-Lus}(P(M_\bullet)) := (c_1, \dots, c_N)$$

と書くことにする .

Remark . \mathbf{i} を w_0 の 1 つの reduced word として , $b \in B(\infty)$ の \mathbf{i} -Lusztig datum が $\mathbf{c} := (c_1, \dots, c_N)$ であったとする . このとき別の reduced word \mathbf{i}' に関する b の \mathbf{i}' -Lusztig datum $\mathbf{c}' := (c'_1, \dots, c'_N)$ を , \mathbf{i} -Lusztig datum $\mathbf{c} := (c_1, \dots, c_N)$ から計算するアルゴリズムが存在することは , Lusztig [L2] によって以前から知られていた . つまり , ある一つの reduced word に対する Lusztig datum が決まれば , 他の reduced word に対する Lusztig datum は自動的に決定されることになる . したがって 「ある一つの reduced word に対する Lusztig datum が , 他の reduced word に対する Lusztig datum の情報を全て知っている」ということ自身は別に驚くことではない .

⁶ \mathfrak{g} として一般の単純リー代数をとった場合には , \mathcal{P} は $U_q^-(\mathfrak{g}^\vee)$ の crystal basis $B(\infty)$ と同型となる . 今の場合には $\mathfrak{g}^\vee \cong \mathfrak{g}$ であるので , 主張は上のようなになる .

⁷edge inequality (5.1.1) から c_k は非負整数となる .

5.3. 後の議論で必要になるので、既約表現の crystal basis $B(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$) の MV polytope による実現についても触れておく。知られている結果は次の通り：

Proposition 5.3.1. $\lambda \in P_+$ に対し、 λ の W -orbit $W\lambda$ の ($\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 内での) convex hull を $Conv(W\lambda)$ と書く。また $P(M_{\bullet}) \in \mathcal{P}$ であって、 $P(M_{\bullet}) \subset Conv(W\lambda)$ かつ $\mu_{w_0} = \lambda$ となるものの全体を $\mathcal{P}(\lambda)$ とおく。このとき $\mathcal{P}(\lambda)$ は crystal structure をもち、crystal として $B(\lambda)$ と同型である。

5.4. 簡単のために A_n 型に限定したが、前節までの議論は一般の単純リー代数の場合に拡張可能な話である（部分的に A, D, E でないと成り立たない話もある）。他方、本節の話は A 型以外では知られていない話である。

次の結果は Anderson-Kogan [AK] による。

Proposition 5.4.1 ([AK]). $\lambda, \mu \in P_+$ とし、crystal の埋め込み

$$\Phi_{\lambda+\mu; \lambda, \mu} : B(\lambda + \mu) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\mu), \quad b_{\lambda+\mu} \mapsto b_{\lambda} \otimes b_{\mu}$$

を考える。

$$\Phi_{\lambda+\mu; \lambda, \mu}(b) = b_1 \otimes b_2 \quad (b \in B(\lambda + \mu), b_1 \in B(\lambda), b_2 \in B(\mu))$$

とし、Proposition 5.3.1 の同一視によって b, b_1, b_2 に対応する MV polytope を P, P_1, P_2 とする。このとき、

$$\mathbf{i}^{(0)}\text{-Lus}(P) = \mathbf{i}^{(0)}\text{-Lus}(P_1) + \mathbf{i}^{(0)}\text{-Lus}(P_2)$$

であれば、

$$P \subset P_1 + P_2$$

が成り立つ。ここに、 $P_1 + P_2$ は polytope P_1 と polytope P_2 の Minkowski sum

$$P_1 + P_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_i \in P_i \ (i = 1, 2)\}$$

である。

5.5. 前半の話と併せることによって次の Corollary を得る：

Corollary 5.5.1. dominant integral weight $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \Lambda_i \in P_+$ を

$$\lambda = \Lambda_{i_1} + \cdots + \Lambda_{i_t} \quad (1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_t \leq n)$$

と表示して、crystal の埋め込み

$$B(\lambda) \hookrightarrow B(\Lambda_{i_1}) \otimes \cdots \otimes B(\Lambda_{i_t})$$

を考える。Proposition 5.3.1 の同一視によって、MV polytope の対応が

$$P \mapsto P_1 \otimes \cdots \otimes P_t$$

であったとする。このとき

$$P \subset P_1 + \cdots + P_t \tag{5.5.1}$$

である。

これは 1.4 節で述べた解答の (2) にあたる。5.2 節で述べたこととも関係するが、BZ datum M_{\bullet} が全ての reduced word \mathbf{i} に対する \mathbf{i} -Lusztig datum の情報を明示的に知っているということは、逆に言えば与えられた $b \in B(\lambda)$ に対して対応する BZ datum M_{\bullet} を求めるには、あらゆる reduced word に対する Lusztig datum を全て計算しなければならず、計算のアルゴリズムはわかっているとはいえ、実際にはほぼ不可能な話である。

関係式 (5.5.1) は、もちろん P の形を完全に決定するものではないが、上記のような状況の下では P の形を知る上でかなりの情報が得られていることに注意されたい。

また, 最近 A 型に限定しない場合でも (ある条件の下で) (5.5.1) と同様の関係式が成り立つことが加藤-内藤-佐垣 [KNS] によって示されている. その証明には今回のような組合せ論的手法ではなく, オリジナルの MV cycle の定義に基づいた affine Grassmannian の幾何が用いられる.

REFERENCES

- [A] J. E. Anderson, *On Mirković and Vilonen's Intersection Homology Cycles for the Loop Grassmannian*, PhD thesis, Princeton University, 2000.
- [AK] J. Anderson and M. Kogan *The algebra of Mirković-Vilonen cycles in type A*, Pure and Appl. Math. Quarterly **2** (2006), 1187-1215.
- [BFZ] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices*, Adv. Math. **122** (1996), 49-149.
- [F] W. Fulton, *Young tableaux*, London Math. Soc. Student Texts **35** (1997), Cambridge University Press.
- [K1] J. Kamnitzer, *Mirković-Vilonen cycles and polytopes*, arXiv:math.AG/0501365, to appear in Ann. of Math.
- [K2] J. Kamnitzer, *The crystal structure on the set of Mirković-Vilonen polytopes*, Adv. Math. **215** (2007), 66-93
- [Kas] M. Kashiwara, *Global crystal bases of quantum groups*, Duke Math. J. **69** (1993), 455-485.
- [KNS] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, *Polytopal Estimate of Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal*, arXiv:0912.0586.
- [L1] G. Lusztig, *Singularities, character formulas and a q -analogue of weight multiplicities*, Astérisque **101-102** (1983), 208-229.
- [L2] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized universal enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447-498.
- [MV1] I. Mirković and K. Vilonen, *Perverse sheaves on affine Grassmannians and Langlands Duality*, Math. Res. Lett. **7** (2000), 13-24.
- [MV2] I. Mirković and K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Ann. of Math. **166** (2007), 95-143.
- [R] M. Reineke, *On the coloured graph structure of Lusztig's canonical basis*, Math. Ann. **307** (1997), 705-723.
- [S] Y. Saito, *PBW basis of quantum universal enveloping algebras*, Publ. RIMS. **30** (1994), 209-232.
- [Sa] A. Savage, *Geometric and combinatorial realizations of crystal graphs*, Alg. Rep. Theory **9** (2006), 161-199.