２０１１年度数学I演習補足プリント

（１月３０日配布）

担当：斉藤　義久

時間中に詳しく解説出来なかった

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の原点におけるテイラー展開についてプリントで補足する．

そもそも与えられた関数 $f(x)$ が $x = a$ でテイラー展開出来るためには，$f(x)$ は $x = a$ で何回でも微分可能（C^∞-級）でなければならない．上の $f(x)$ の場合，定義だけでは $x = 0$ における無限回微分可能性は明らかではない．したがって，まずこれから示していく必要がある．

いくつか準備をする．

補題１．n を非負整数とするとき，

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

（証明）e^x に対するテイラーの定理から，

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

よって，

$$\frac{x^n}{e^x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2!x^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!x} + \frac{1}{n!}\right) + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x}.$$

$x \to +\infty$ のとき，分母の ( ) 内は $1/n!$ に収束し，最後の項は ∞ に発散する．すなわち，分母はトータルでは ∞ に発散する．よって，

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

□

系２．

$$\lim_{x \to +0} \frac{e^{-1/x}}{x^n} = 0, \qquad \lim_{x \to -0} \frac{e^{1/x}}{x^n} = 0.$$

（証明）$x = \pm 1/t$ とすれば補題１に帰着．　□

命題３．最初に与えた $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で C^∞-級であり，

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

である．

（証明）$x \neq 0$ なら微分可能であることは明らか．よって $x = 0$ における微分可能性のみ議論すればよい．

まず $x > 0$ とする．このとき

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{-1/x}}{x}.$$

系２の第１式より

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{e^{-1/x}}{x} = 0. \tag{1}$$

今度は $x < 0$ とする．このとき

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{1/x}}{x}.$$

系２の第１式より

$$\lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{e^{1/x}}{x} = 0. \tag{2}$$

(1),(2) を併せて，

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

すなわち，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で，しかも

$$f'(0) = 0. \tag{3}$$

$x \neq 0$ のときは $f(x)$ の微分は簡単に計算できて，

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x}}{x^2} & (x > 0), \\ -\dfrac{e^{1/x}}{x^2} & (x < 0). \end{cases}$$

先の議論と同様にして，

$$\lim_{x \to +0} f'(x) = \lim_{x \to +0} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x \to -0} f'(x) = \lim_{x \to +0} \left(-\frac{e^{1/x}}{x^2} \right) = 0.$$

(3) と併せれば，

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0).$$

よって $f'(x)$ は原点で連続である．つまり $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で C^1-級であり，導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x}}{x^2} & (x > 0), \\ 0 & (x = 0), \\ -\dfrac{e^{1/x}}{x^2} & (x < 0). \end{cases}$$

$f'(x)$ について同様の議論を行う．まず $x > 0$ のときは

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{e^{-1/x}}{x^3} \longrightarrow 0 \quad (x \to +0).$$

$x < 0$ のときは

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = -\frac{e^{1/x}}{x^3} \longrightarrow 0 \quad (x \to -0).$$

よって $f'(x)$ は $x = 0$ で微分可能で，

$$f''(0) = 0.$$

$x \neq 0$ なら

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{2}{x^3}\right) e^{-1/x} & (x > 0), \\ \left(\dfrac{1}{x^4} + \dfrac{2}{x^3}\right) e^{1/x} & (x < 0). \end{cases}$$

系 2 より

$$\lim_{x \to +0} f''(x) = 0 = \lim_{x \to -0} f''(x).$$

したがって

$$\lim_{x \to 0} f''(x) = 0 = f''(0).$$

よって $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で C^2-級であり，２階導関数 $f''(x)$ は

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{2}{x^3}\right) e^{-1/x} & (x > 0), \\ 0 & (x = 0), \\ \left(\dfrac{1}{x^4} + \dfrac{2}{x^3}\right) e^{1/x} & (x < 0). \end{cases}$$

以下 $n = 3, 4, \cdots$ に対しても，同様の議論で

- $f^{(n)}(0) = 0$,
- $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で C^n-級

を示すことができる．したがって $f(x)$ は C^∞-級である． □

$\circ$ $f(x)$ のテイラー展開

命題 3 から，$f(x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開は，

$$\begin{aligned} f(x) &\sim f(0)\cdot 1 + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \cdots \\ &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + \frac{0}{2!}\cdot x^2 + \cdots + \frac{0}{n!}\cdot x^n + \cdots . \end{aligned}$$

右辺のベキ級数は任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して収束して，値はもちろん 0 となる．他方，$x\neq 0$ では $f(x)$ は正である．つまり，この例の場合は,『**最初に与えた関数 $f(x)$ と，$f(x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開で現れる級数が，ともに任意の $x\in\mathbb{R}$ で意味を持っているにもかかわらず，$x=0$ 以外では両者が一致していない**』のである．

この例からわかるように，テイラー展開はもとの関数を復活させるとは限らない．確かに，与えられた関数をベキ級数の形で表示するテイラー展開は便利な道具であるけれども，世の中にはベキ級数では表示出来ない（＝多項式で近似出来ない[1]）関数もたくさんあるのである．

定義. $f(x)$ を C^∞-級関数とする．正の実数 $r>0$ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (|x|<r)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x=a$ で**ベキ級数展開可能**，もしくは**解析的**であるという．解析的な関数を C^ω**-級関数**と呼ぶ場合もある．

定義から

$$C^\omega\text{-級} \quad \Longrightarrow \quad C^\infty\text{-級}$$

は明らかであるが，逆は成り立たない．実際，C^ω-級関数と C^∞-級関数の間にはギャップがあり，今回紹介した

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

ちょうどこのギャップに属する関数になっている．

[1] 級数が『有限和の極限』であることから，明らかであろう．