



例外点における対称性と強相関効果

吉田恒也 (京大理)

CRESTチュートリアルワークショップ
2023/03/27 @ Zoom

TY-Peters-Kawakami-Hatsugai PTEP **2020**, 12A109 (2020).
TY-Hatsugai PRB **107**, 075118 (2023).

講演の予定

1日目: 非エルミートバンドの例外点と対称性

2日目: 平衡強相関係系における準粒子と例外点

3日目: 強相関効果に対する安定性

講演の予定

1日目: 非エルミートバンドの例外点と対称性

2日目: 平衡強相関係系における準粒子と例外点

3日目: 強相関効果に対する安定性



1体のハミルトニアン



多体ハミルトニアン

講演の予定(1日目)

～非エルミートバンドの例外点と対称性～

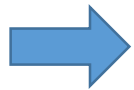
例外点の定義

エルミート系のバンド縮退点(ディラック点ワイル点)

非エルミート系のバンド縮退点(例外点)

講演の予定(1日目)

～非エルミートバンドの例外点と対称性～



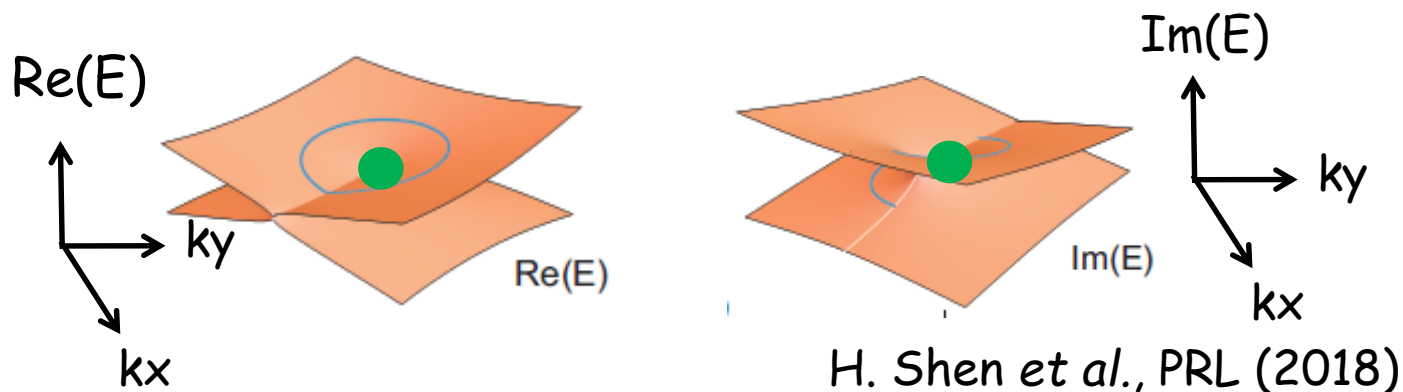
例外点の定義

エルミート系のバンド縮退点(ディラック点ワイル点)

非エルミート系のバンド縮退点(例外点)

例外点の定義

- ・波数空間あるいはパラメータ空間上でエネルギーが実部・虚部の両方で縮退する点
- ・ハミルトニアン of 微小な変化(摂動)に対し安定

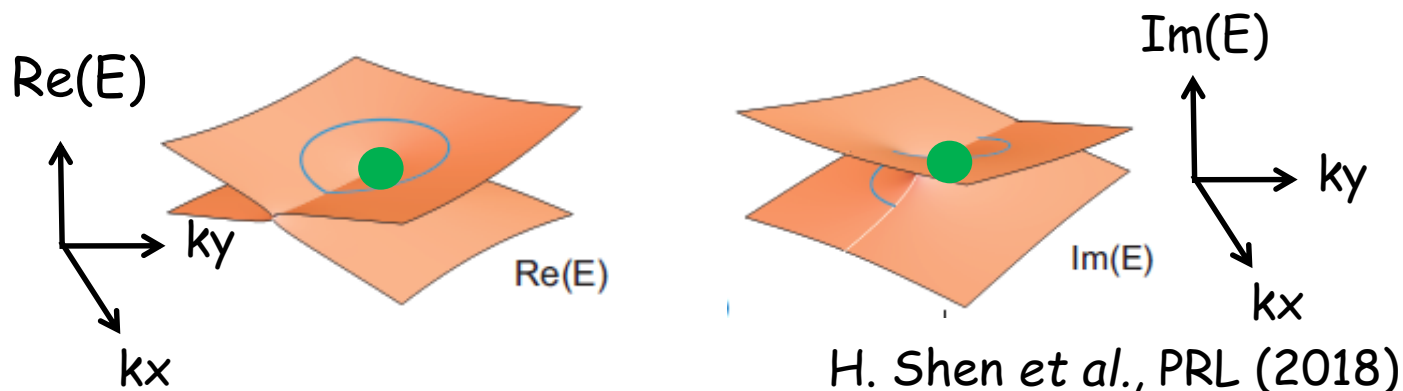


1日目のメッセージ

- ・例外点はトポロジカルに保護された非エルミートなエネルギー縮退。
- ・対称性の効果により構造が変化する。

例外点の定義

- ・波数空間あるいはパラメータ空間上でエネルギーが実部・虚部の両方で縮退する点
- ・ハミルトニアンの微小な変化(摂動)に対し安定



※上記の定義では、ハミルトニアンは必ずしも対角化不可能というわけではない。

例:

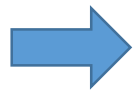
$$h(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 2k & ik \\ ik & -2k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし、このような例はファインチューンしない限り起こらない(後述)。

講演の予定(1日目)

～非エルミートバンドの例外点と対称性～

例外点の定義

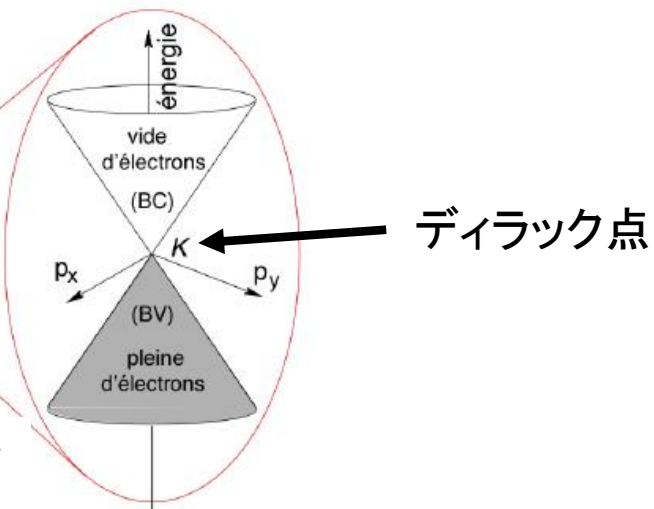
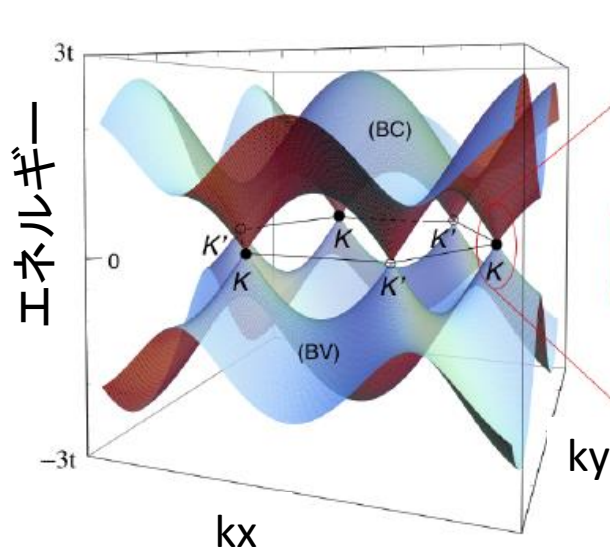
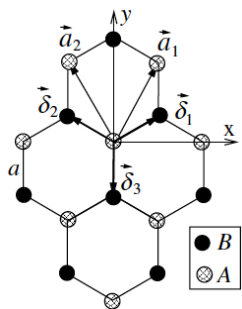


エルミート系のバンド縮退点(ディラック点ワイル点)

非エルミート系のバンド縮退点(例外点)

エルミート系のバンド縮退点(ディラック点ワイル点)

ディラックフェルミオンin2D



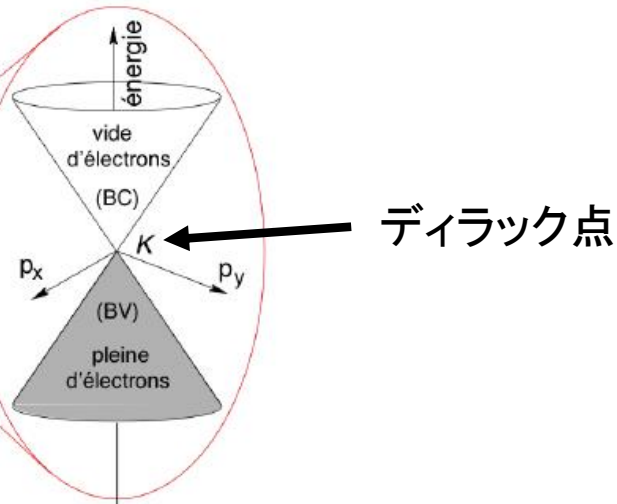
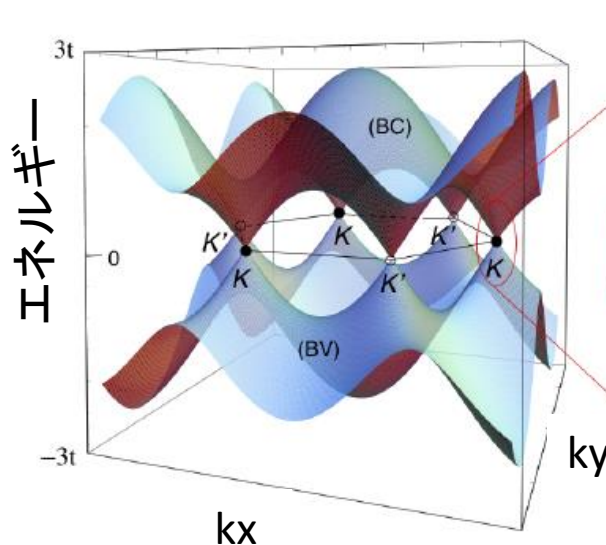
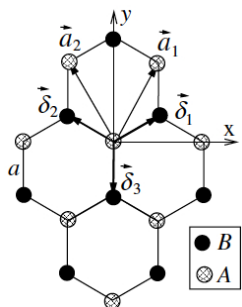
Figs. from J.-N. Fuchs arXiv (2013)

(c)

M. Fujita et al., JPSJ (1996)

エルミート系のバンド縮退点(ディラック点ワイル点)

ディラックフェルミオンin2D

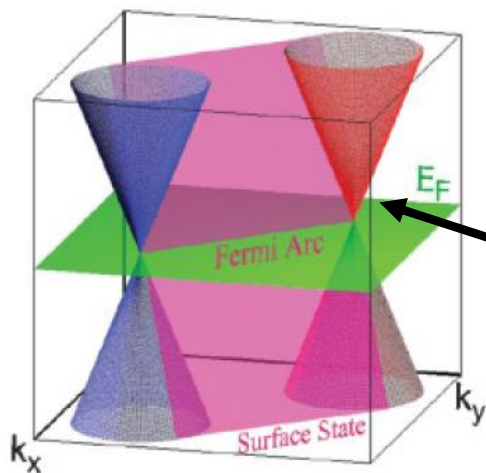


Figs. from J.-N. Fuchs arXiv (2013)

(c)

M. Fujita et al., JPSJ (1996)

ワイルフェルミオンin3D



ワイル点

X. Wan et al., PRB (2011)

ディラック点、ワイル点の摂動に対する安定性

- ・有効模型 (2x2行列)
- ・トポロジカル不変量

ディラック点、ワイル点の摂動に対する安定性



- ・有効模型 (2x2行列)
- ・トポロジカル不変量

2x2有効模型の解析in 2D (対称性なし)

ブロッホハミルトニアン $\vec{k} = (k_x, k_y)$

$$H(\vec{k}) = b_0(\vec{k})\tau_0 + \vec{b}(\vec{k}) \cdot \vec{\tau}$$

エネルギー固有値

$$\epsilon_{\pm} = b_0 \pm \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

$$b_0 \in \mathbb{R} \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2x2有効模型の解析in 2D (対称性なし)

ブロッホハミルトニアン $\vec{k} = (k_x, k_y)$

$$H(\vec{k}) = b_0(\vec{k})\tau_0 + \vec{b}(\vec{k}) \cdot \vec{\tau}$$

エネルギー固有値

$$\epsilon_{\pm} = b_0 \pm \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

$$b_0 \in \mathbb{R} \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

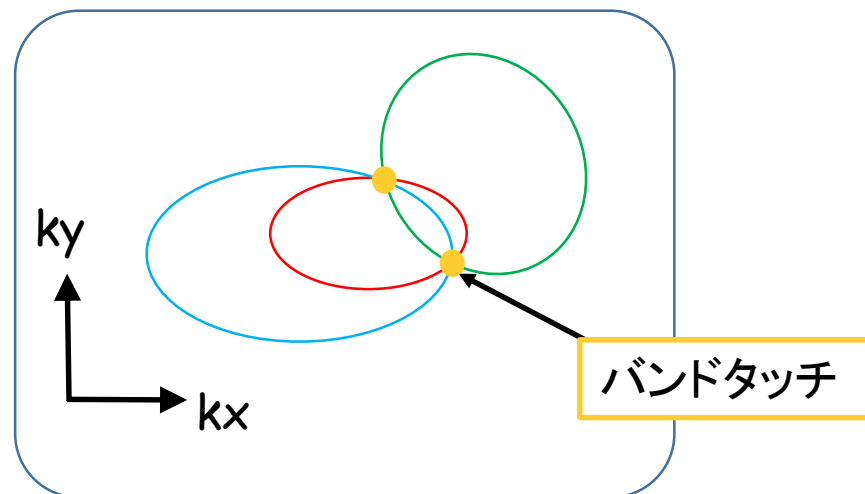
$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

バンドタッチのための条件

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0$$



2x2有効模型の解析in 2D (対称性なし)

ブロッホハミルトニアン $\vec{k} = (k_x, k_y)$

$$H(\vec{k}) = b_0(\vec{k})\tau_0 + \vec{b}(\vec{k}) \cdot \vec{\tau}$$

エネルギー固有値

$$\epsilon_{\pm} = b_0 \pm \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

$$b_0 \in \mathbb{R} \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

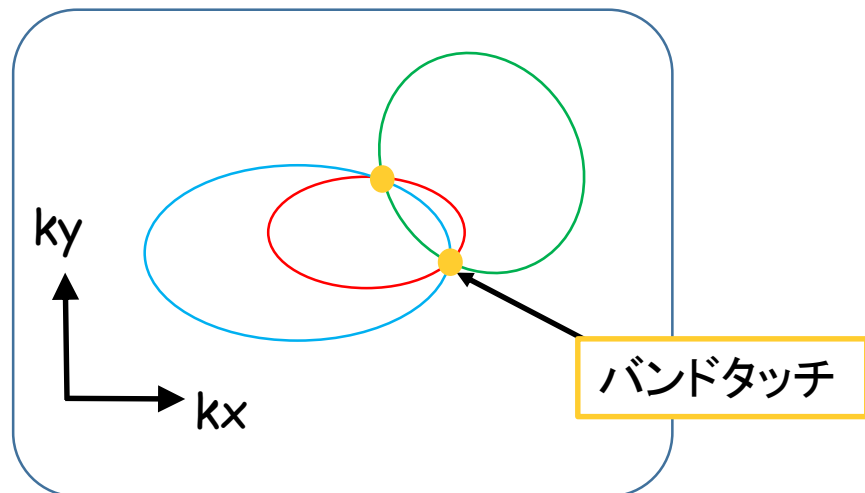
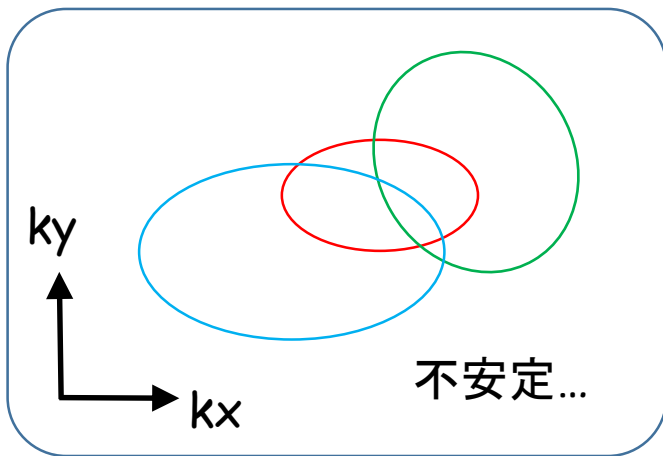
$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

バンドタッチのための条件

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0$$



2x2有効模型の解析in 2D (カイラル対称性)

ブロッホハミルトニアン $\vec{k} = (k_x, k_y)$

$$H(\vec{k}) = b_0(\vec{k})\tau_0 + \vec{b}(\vec{k}) \cdot \vec{\tau}$$

エネルギー固有値

$$\epsilon_{\pm} = b_0 \pm \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

$$b_0 \in \mathbb{R} \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

バンドタッチのための条件

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0$$

カイラル対称性: $\tau_3 H(\vec{k}) \tau_3 = -H(\vec{k})$

$b_3 = 0$ は対称性によって満たされる。

2x2有効模型の解析in 2D (カイラル対称性)

ブロッホハミルトニアン $\vec{k} = (k_x, k_y)$

$$H(\vec{k}) = b_0(\vec{k})\tau_0 + \vec{b}(\vec{k}) \cdot \vec{\tau}$$

エネルギー固有値

$$\epsilon_{\pm} = b_0 \pm \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

$$b_0 \in \mathbb{R} \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

バンドタッチのための条件

$$b_1 = 0$$

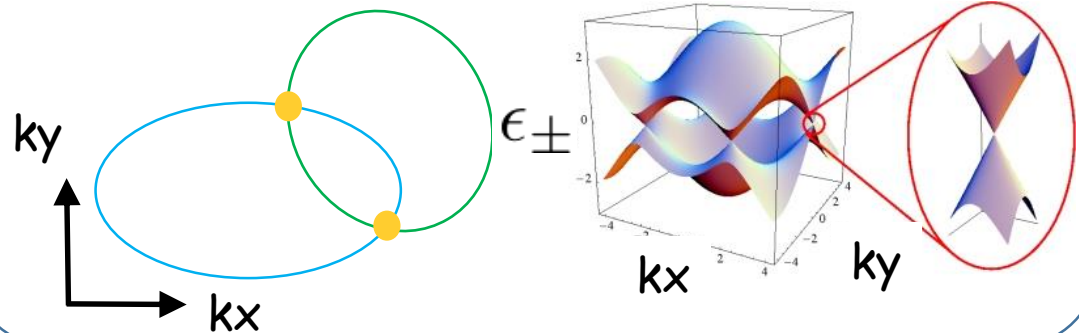
$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0$$

カイラル対称性: $\tau_3 H(\vec{k}) \tau_3 = -H(\vec{k})$

$b_3 = 0$ は対称性によって満たされる。

ディラック点@グラフェン



2x2有効模型の解析in 2D (カイラル対称性)

ブロッホハミルトニアン $\vec{k} = (k_x, k_y)$

$$b_0 \in \mathbb{R} \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

$$H(\vec{k}) = b_0(\vec{k})\tau_0 + \vec{b}(\vec{k}) \cdot \vec{\tau}$$

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

エネルギー固有値

$$\epsilon_{\pm} = b_0 \pm \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

バンドタッチのための条件

$$b_1 = 0$$

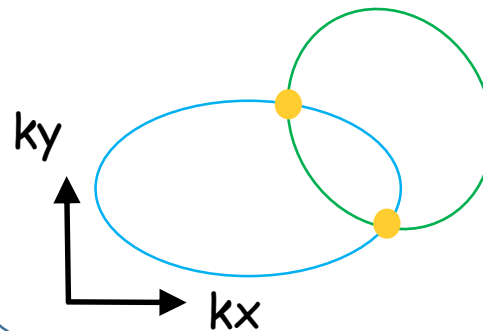
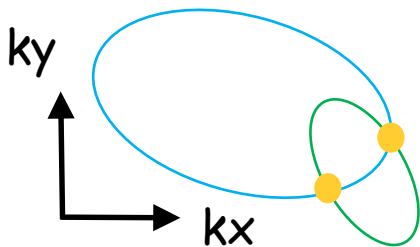
$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0$$

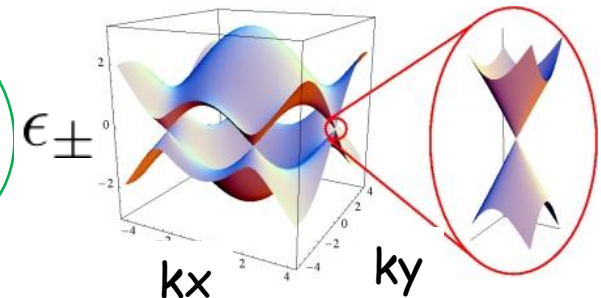
カイラル対称性: $\tau_3 H(\vec{k}) \tau_3 = -H(\vec{k})$

$b_3 = 0$ は対称性によって満たされる。

ディラック点は摂動に対し安定!



ディラック点@グラフェン



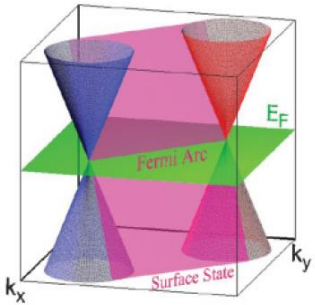
2x2有効模型の解析in 3D (対称性なし)

ブロッホハミルトニアン

$$H(\vec{k}) = b_0(\vec{k})\tau_0 + \vec{b}(\vec{k}) \cdot \vec{\tau}$$

エネルギー固有値

$$\epsilon_{\pm} = b_0 \pm \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

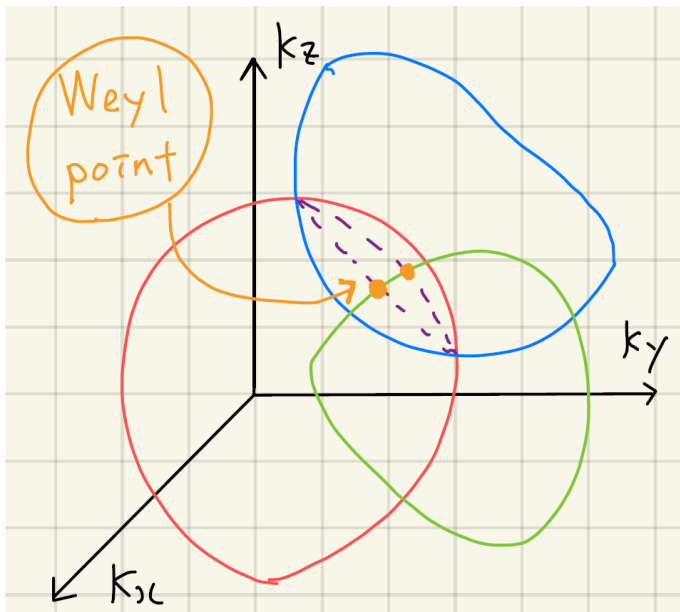


バンドタッチの条件

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0$$



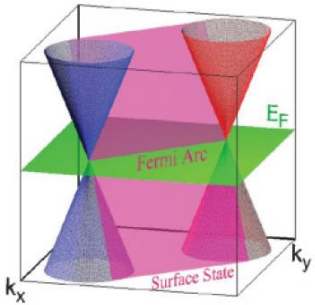
2x2有効模型の解析in 3D (対称性なし)

ブロッホハミルトニアン

$$H(\vec{k}) = b_0(\vec{k})\tau_0 + \vec{b}(\vec{k}) \cdot \vec{\tau}$$

エネルギー固有値

$$\epsilon_{\pm} = b_0 \pm \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

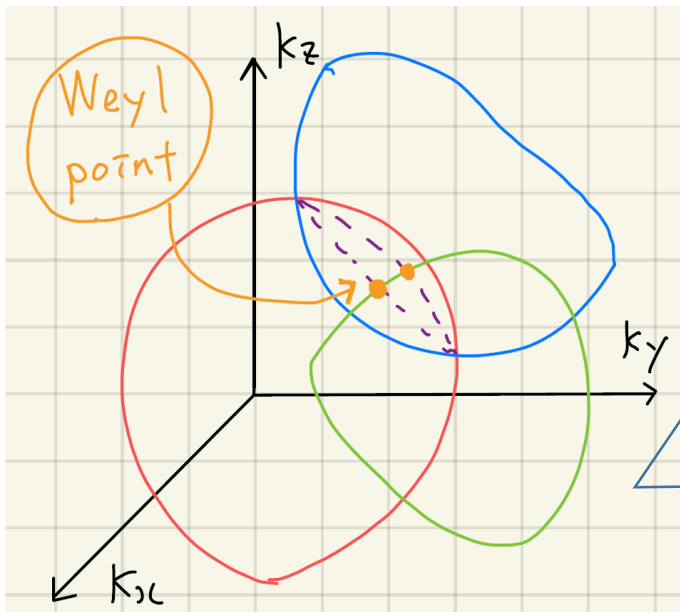


バンドタッチの条件

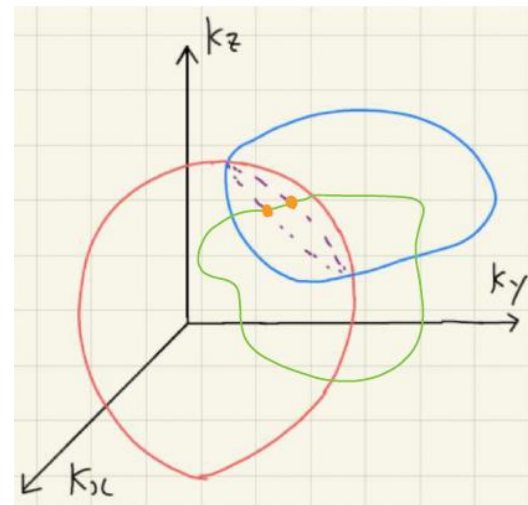
$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0$$



ワイル点は摂動に対し安定

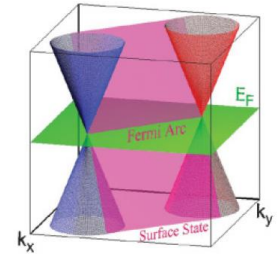


他の次元の場合

Dimension	1	2	3
No symmetry	—	—	point
With chiral symmetry	—	point	loop

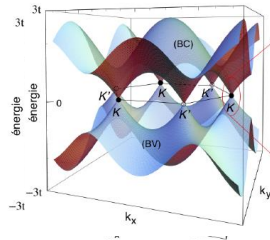
[バンドタッチする領域の次元] =
[ブリルアンゾーンの次元] - [バンドタッチのための条件の数]

他の次元の場合



ワイル半金属

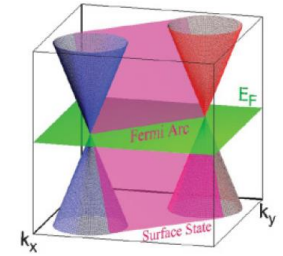
Dimension	1	2	3
No symmetry	—	—	point
With chiral symmetry	—	point	loop



ディラック半金属

[バンドタッチする領域の次元] =
 [ブリルアンゾーンの次元] - [バンドタッチのための条件の数]

他の次元の場合

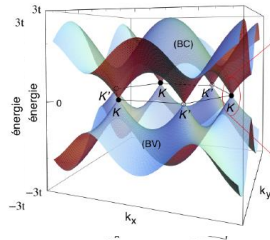


Dimension	1	2	3
No symmetry	—	—	point
With chiral symmetry	—	point	loop

ワイル半金属

ディラック半金属

ノードルライン半金属



[バンドタッチする領域の次元] =
[ブリルアンゾーンの次元] - [バンドタッチのための条件の数]

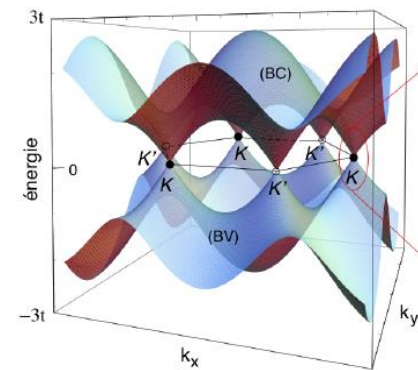
ディラック点、ワイル点の摂動に対する安定性

・有効模型 (2x2行列)



・トポロジカル不変量

ディラック半金属



トポロジカル不変量によるディラック点の解析

ワインディング数 _____ $H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & Q(\mathbf{k}) \\ Q^\dagger(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}$

$$W_H = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi i} \partial_k \arg[\det Q(k)]$$

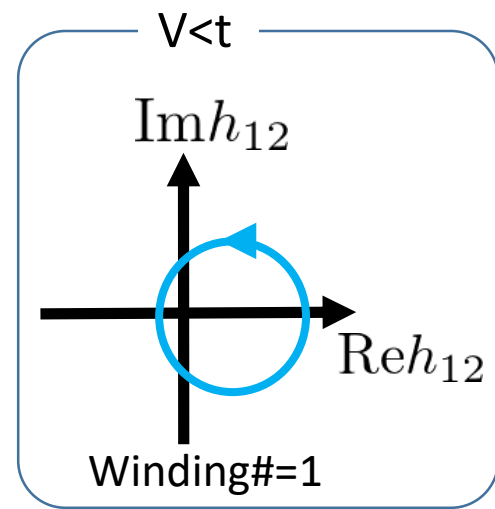
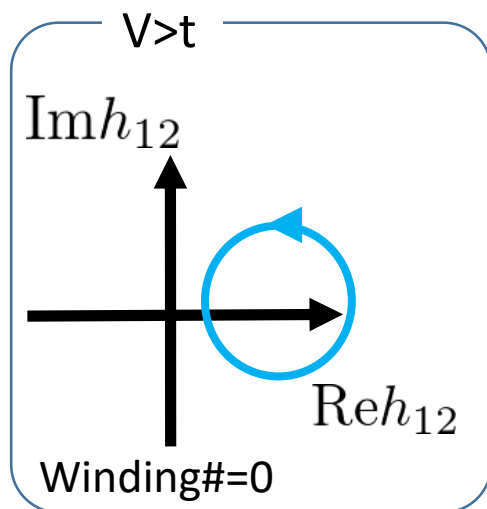
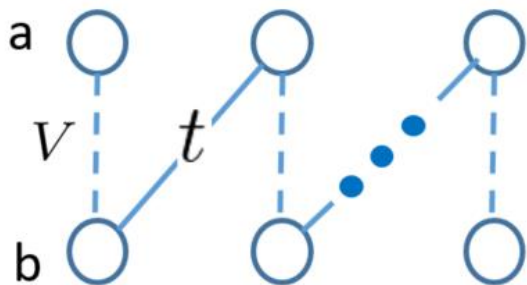
トポロジカル不変量によるディラック点の解析

ワインディング数 _____ $H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & Q(\mathbf{k}) \\ Q^\dagger(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}$

$$W_H = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi i} \partial_k \arg[\det Q(k)]$$

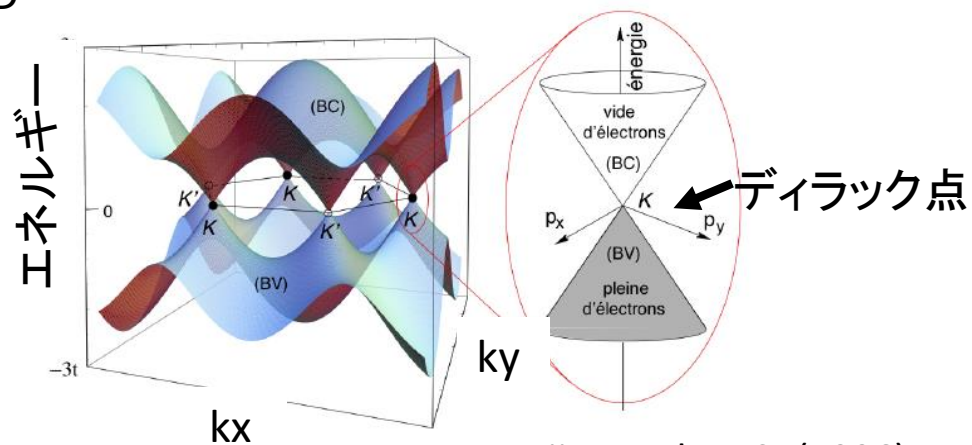
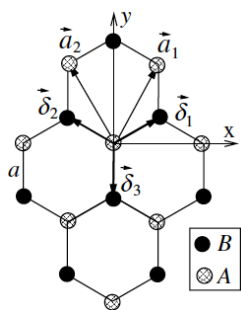
適用例 (Su-Schrieffer-Heeger 模型)

$$h(k) = \begin{pmatrix} 0 & V + te^{ik} \\ V + te^{-ik} & 0 \end{pmatrix}$$



トポロジカル不変量によるディラック点の解析

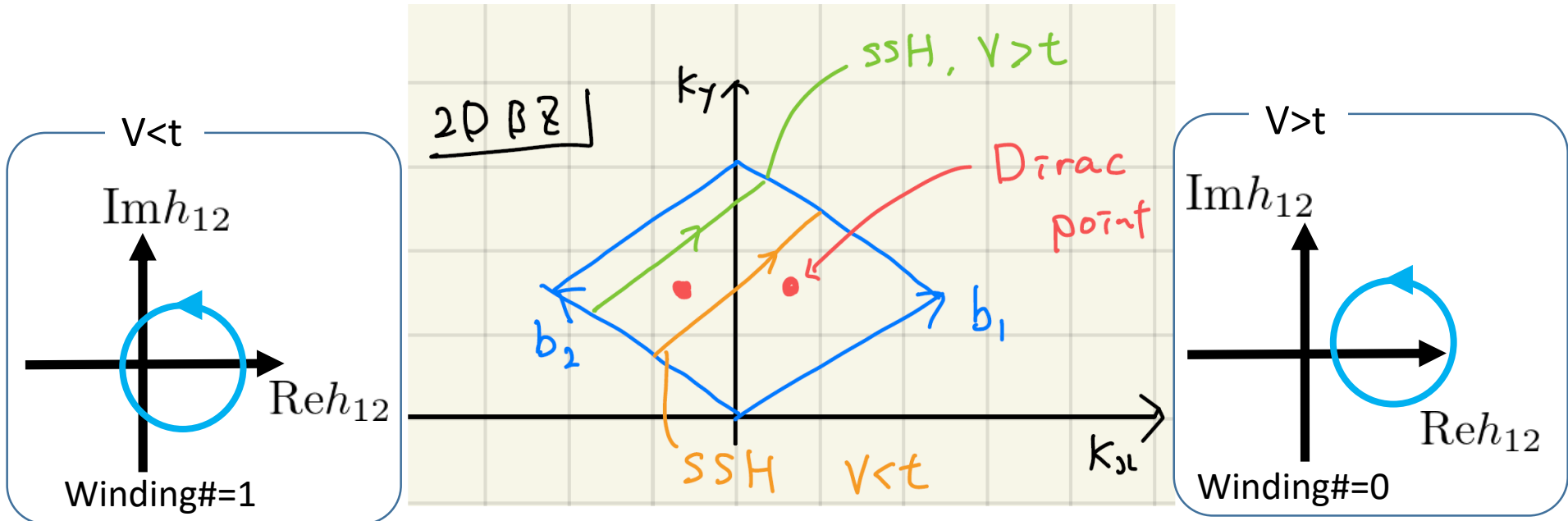
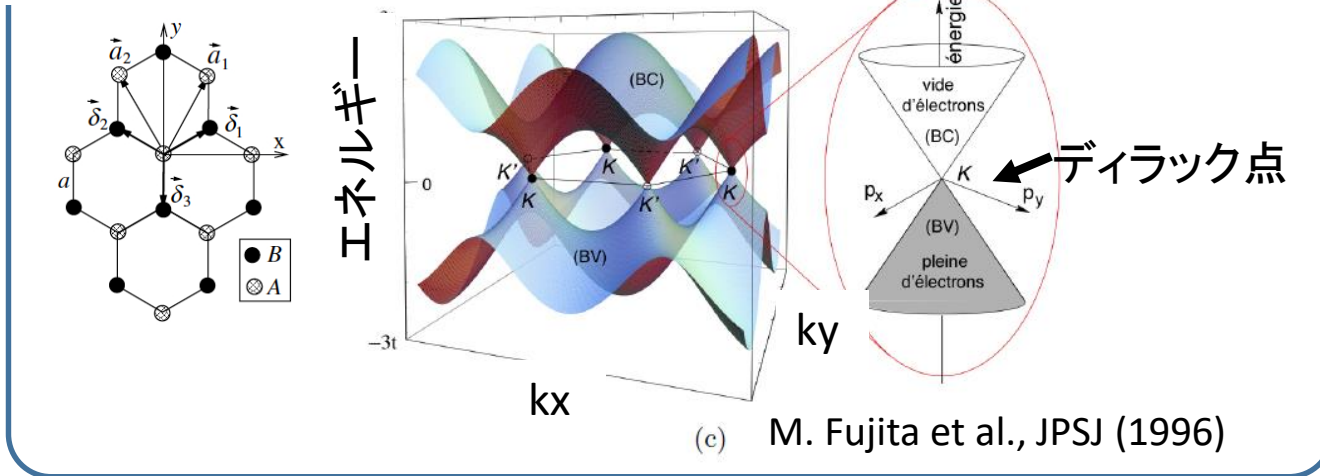
ディラック点in2D



(c) M. Fujita et al., JPSJ (1996)

トポロジカル不変量によるディラック点の解析

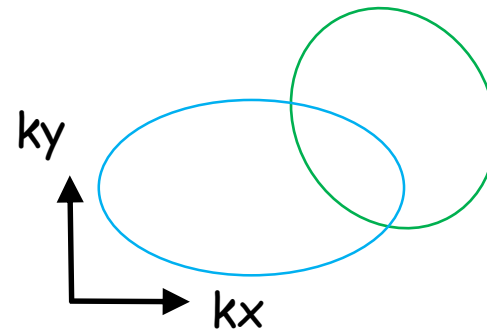
ディラック点in2D



中間まとめ:

エルミート系のバンド縮退点(ディラック点・ワイル点)

ディラック点・ワイル点は
摂動に対しに安定



Dimension	1	2	3
No symmetry	—	—	point
With chiral symmetry	—	point	loop

[バンドタッチする領域の次元] =

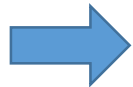
[ブリルアンゾーンの次元] - [バンドタッチのための条件の数]

講演の予定(1日目)

～非エルミートバンドの例外点と対称性～

例外点の定義

エルミート系のバンド縮退点(ディラック点ワイル点)



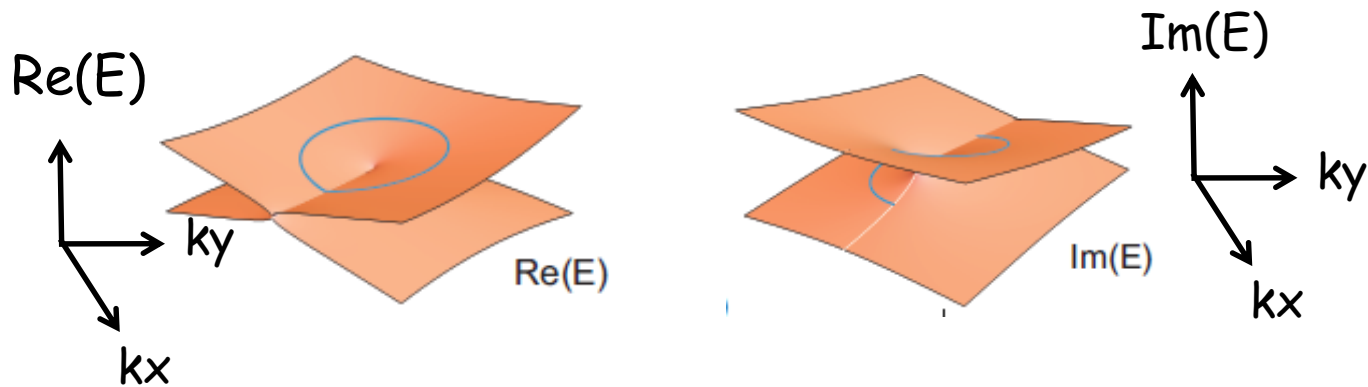
非エルミート系のバンド縮退点(例外点)

非エルミート系のバンド縮退点(例外点)

エルミート系	ディラック点・ワイル点
非エルミート系	例外点

例外点の定義 (リマインダ)

- ・波数空間あるいはパラメータ空間上でエネルギーが実部・虚部の両方で縮退する点
- ・ハミルトニアンの微小な変化(摂動)に対し安定



H. Shen *et al.*, PRL (2018)

例外点の摂動に対する安定性

- ・有効模型 (2x2行列)
- ・トポロジカル不変量

例外点の摂動に対する安定性

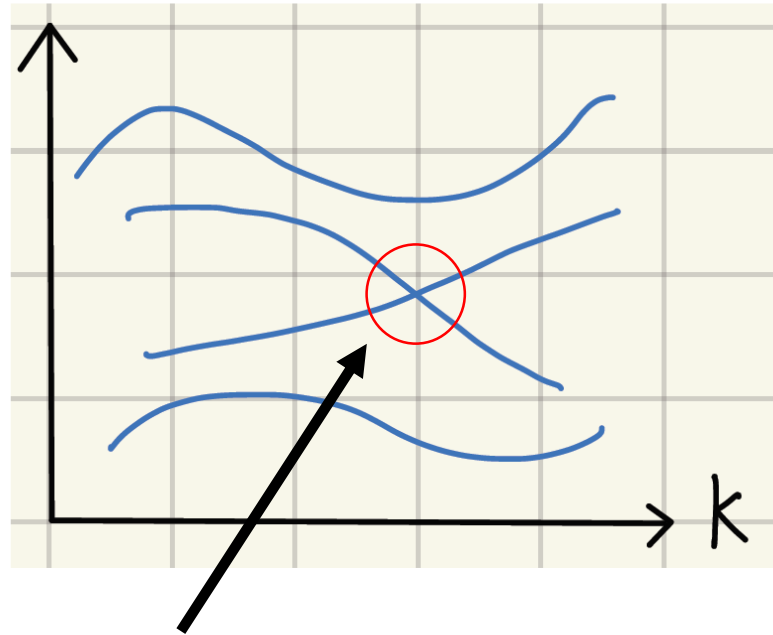


・2x2有効模型

・トポロジカル不変量

有効モデルでの議論

エネルギー(実部・虚部)



バンドタッチは 2×2 行列で記述できる。

2x2有効模型の解析in 2D (対称性なし)

$\tau_0 = \mathbb{1}$ τ_i ($i = 1, 2, 3$):パウリ行列

ハミルトニアン

$$H(\vec{k}) = [b_0(\vec{k}) + id_0(\vec{k})]\tau_0 + [b(\vec{k}) + id(\vec{k})] \cdot \vec{\tau}$$

$$\begin{array}{ll} b_0 \in \mathbb{R} & \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \\ d_0 \in \mathbb{R} & \vec{d} \in \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$\epsilon_{\pm} = b_0 + id_0 \pm \sqrt{b^2 - d^2 + 2i\vec{b} \cdot \vec{d}}$$

2x2有効模型の解析in 2D (対称性なし)

ハミルトニアン

$\tau_0 = \mathbb{1}$ τ_i ($i = 1, 2, 3$):パウリ行列

$$H(\vec{k}) = [b_0(\vec{k}) + id_0(\vec{k})]\tau_0 + [b(\vec{k}) + id(\vec{k})] \cdot \vec{\tau}$$

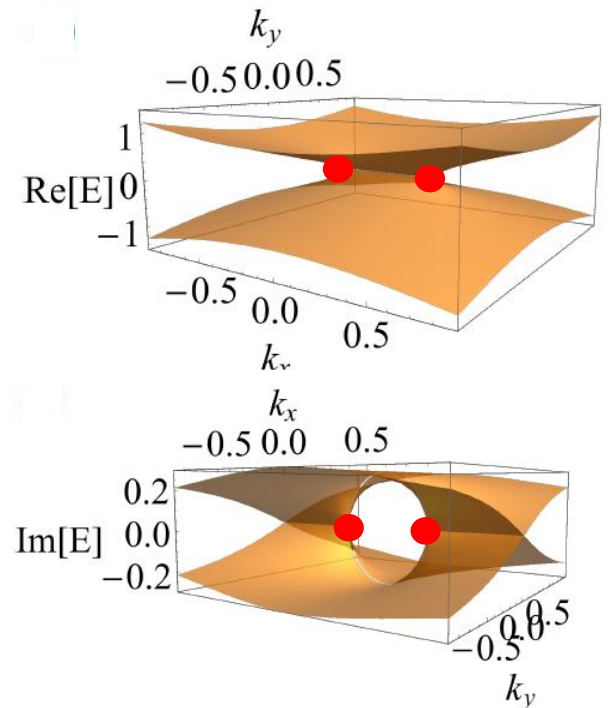
$$\begin{aligned} b_0 &\in \mathbb{R} & \vec{b} &\in \mathbb{R}^3 \\ d_0 &\in \mathbb{R} & \vec{d} &\in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$\epsilon_{\pm} = b_0 + id_0 \pm \sqrt{b^2 - d^2 + 2i\vec{b} \cdot \vec{d}}$$

バンドタッチの条件

$$b^2 - d^2 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$



2x2有効模型の解析in 2D (対称性なし)

ハミルトニアン

$\tau_0 = \mathbb{1}$ τ_i ($i = 1, 2, 3$):パウリ行列

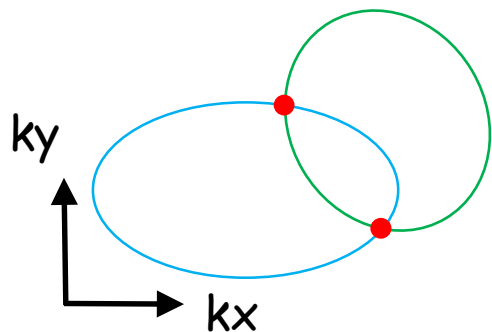
$$H(\vec{k}) = [b_0(\vec{k}) + id_0(\vec{k})]\tau_0 + [b(\vec{k}) + id(\vec{k})] \cdot \vec{\tau}$$

$$\begin{aligned} b_0 &\in \mathbb{R} & \vec{b} &\in \mathbb{R}^3 \\ d_0 &\in \mathbb{R} & \vec{d} &\in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$\epsilon_{\pm} = b_0 + id_0 \pm \sqrt{b^2 - d^2 + 2i\vec{b} \cdot \vec{d}}$$

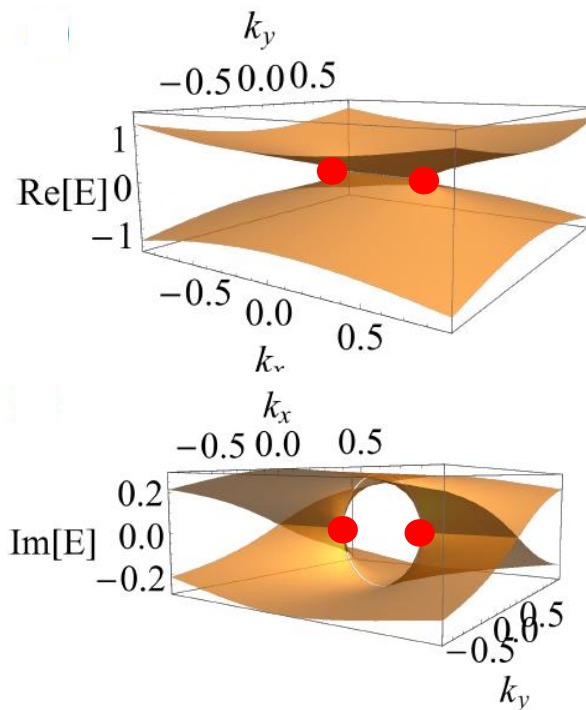
バンドタッチの条件

$$\begin{aligned} b^2 - d^2 &= 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{d} &= 0 \end{aligned}$$



対称性の無い二次元系:
例外点は安定

※ [例外点]
~ [非エルミートなバンドタッチ]

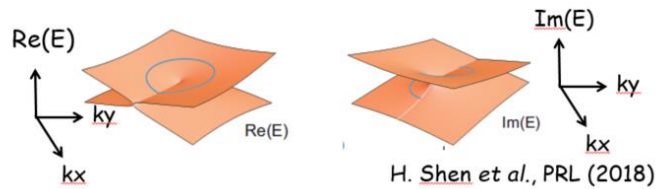


例外点上でハミルトニアンは対角化不可能

冒頭でふれたこと...

例外点の定義

- ・波数空間あるいはパラメータ空間上でエネルギーが実部・虚部の両方で縮退する点
- ・ハミルトニアンの微小な変化(摂動)に対し安定



※上記の定義では、ハミルトニアンは必ずしも対角化不可能というわけではない。

例:

$$h(k) = \begin{pmatrix} 2k & ik \\ ik & -2k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし、このような例はファインチューンしない限り起こらない(後述)。

バンドタッチの条件

$$b^2 - d^2 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

例外点でのハミルトニアン

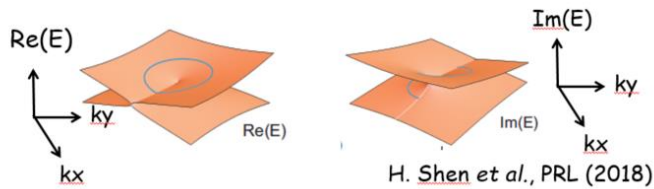
$$H(\vec{k}) = 2b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例外点上でハミルトニアンは対角化不可能

冒頭でふれたこと...

例外点の定義

- ・波数空間あるいはパラメータ空間上でエネルギーが実部・虚部の両方で縮退する点
- ・ハミルトニアンの微小な変化(摂動)に対し安定



※上記の定義では、ハミルトニアンは必ずしも対角化不可能というわけではない。

例:

$$h(k) = \begin{pmatrix} 2k & ik \\ ik & -2k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし、このような例はファインチューンしない限り起こらない(後述)。

バンドタッチの条件

$$b^2 - d^2 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

例外点でのハミルトニアン

$$H(\vec{k}) = 2b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例外点上で対角化できる条件

$$b^2 - d^2 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

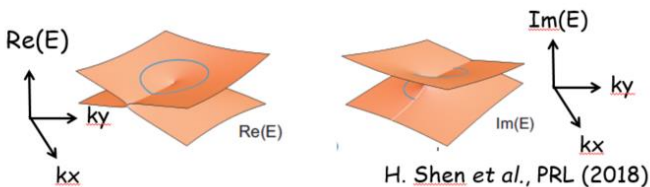
$$b = 0$$

例外点上でハミルトニアンは対角化不可能

冒頭でふれたこと...

例外点の定義

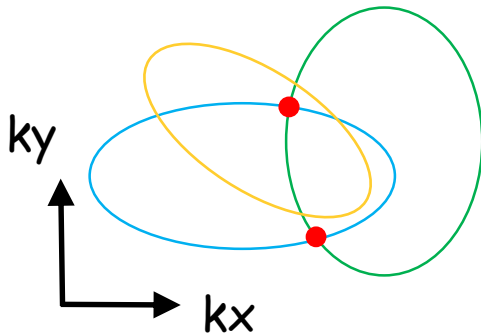
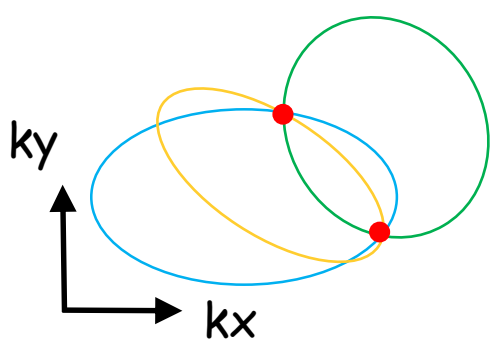
- ・波数空間あるいはパラメータ空間上でエネルギーが実部・虚部の両方で縮退する点
- ・ハミルトニアンの微小な変化(摂動)に対し安定



※上記の定義では、ハミルトニアンは必ずしも対角化不可能というわけではない。

例:
$$h(k) = \begin{pmatrix} 2k & ik \\ ik & -2k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし、このような例はファインチューンしない限り起こらない(後述)。



バンドタッチの条件

$$b^2 - d^2 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

例外点でのハミルトニアン

$$H(\vec{k}) = 2b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例外点上で対角化できる条件

$$b^2 - d^2 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

$$b = 0$$

(ファインチューンしない限り) 例外点上では対角化不可能。

非エルミート系のカイラル対称性

$$\tau_3 H(\vec{k}) \tau_3 = -H^\dagger(\vec{k})$$

$$\rightarrow H = id_0 \tau_0 + b_1 \tau_1 + b_2 \tau_2 + id_3 \tau_3$$

非エルミート系のカイラル対称性

$$\tau_3 H(\vec{k}) \tau_3 = -H^\dagger(\vec{k})$$

$$\rightarrow H = id_0 \tau_0 + b_1 \tau_1 + b_2 \tau_2 + id_3 \tau_3$$

∴)

$$H = H_h + H_a$$

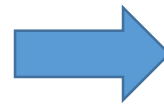
$$H_h = b_0 \tau_0 + \vec{b} \cdot \vec{\tau}$$

$$H_a = i(d_0 \tau_0 + \vec{d} \cdot \vec{\tau})$$



$$\tau_3 H_h \tau_3 = -H_h$$

$$\tau_3 H_a \tau_3 = H_a$$



$$b_0 = 0$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$$

$$\vec{d} = (0, 0, d_3)$$

2x2有効模型の解析in 2D (カイラル対称な系)

カイラル対称性: $\tau_3 H(\vec{k}) \tau_3 = -H^\dagger(\vec{k})$

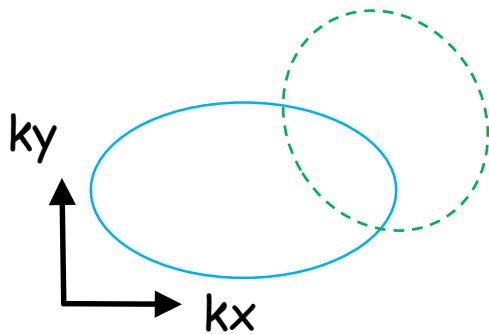
バンドタッチの条件

$$b^2 - d^2 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

← 対称性で満たされる。

$$\begin{aligned} \vec{b} &= (b_1, b_2, 0) \\ \vec{d} &= (0, 0, d_3) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$



※ [例外点]
~ [非エルミートなバンドタッチ]

Budich-Carlstrom-Kunst-Bergholtz PRB(2019)
Okugawa-Yokoyama PRB (2019)
TY-Peters-Kawakami-Hatsugai PRB (2019)

2x2有効模型の解析in 2D (カイラル対称な系)

カイラル対称性: $\tau_3 H(\vec{k}) \tau_3 = -H^\dagger(\vec{k})$

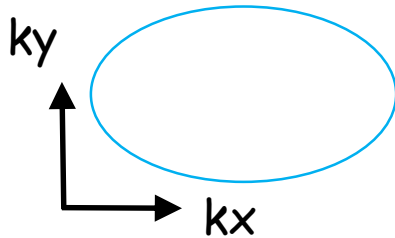
バンドタッチの条件

$$b^2 - d^2 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

← 対称性で満たされる。

$$\begin{aligned} \vec{b} &= (b_1, b_2, 0) \\ \vec{d} &= (0, 0, d_3) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$



※ [例外点]
~ [非エルミートなバンドタッチ]

Budich-Carlstrom-Kunst-Bergholtz PRB(2019)
Okugawa-Yokoyama PRB (2019)
TY-Peters-Kawakami-Hatsugai PRB (2019)

2x2有効模型の解析in 2D (カイラル対称な系)

カイラル対称性: $\tau_3 H(\vec{k}) \tau_3 = -H^\dagger(\vec{k})$

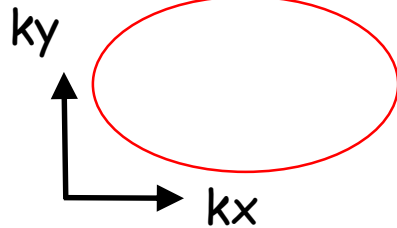
バンドタッチの条件

$$b^2 - d^2 = 0$$

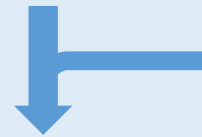
$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

← 対称性で満たされる。

$$\begin{aligned} \vec{b} &= (b_1, b_2, 0) \\ \vec{d} &= (0, 0, d_3) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$



例外点 in 2D



対称性

対称性に保護された例外円 in 2D

※ [例外点]
~ [非エルミートなバンドタッチ]

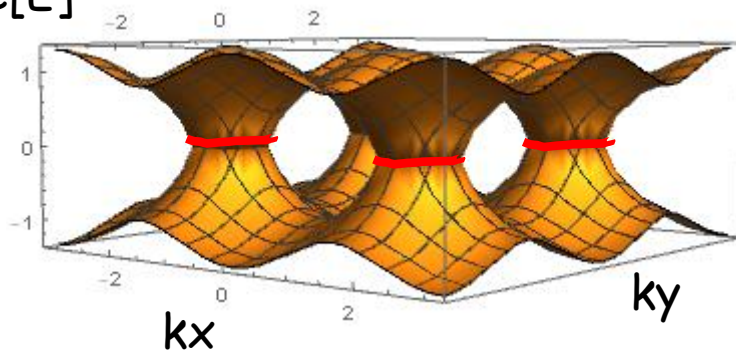
Budich-Carlstrom-Kunst-Bergholtz PRB(2019)
Okugawa-Yokoyama PRB (2019)
TY-Peters-Kawakami-Hatsugai PRB (2019)

例外円の発現例

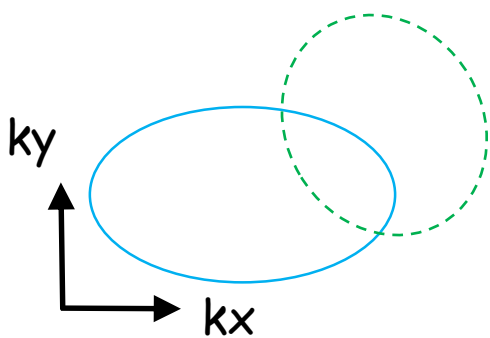
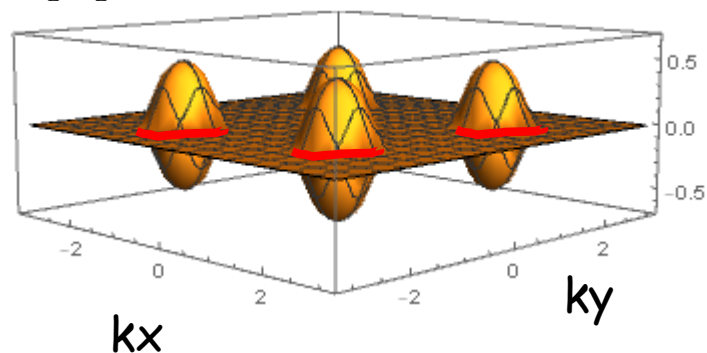
$$H(\vec{k}) = [\vec{b}(\vec{k}) + i\vec{d}(\vec{k})] \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{b} = (\cos k_x, \cos k_y, 0) \quad \vec{d} = (0, 0, 1/2)$$

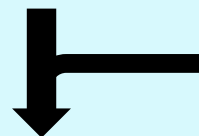
Re[E]



Im[E]



例外点 in 2D

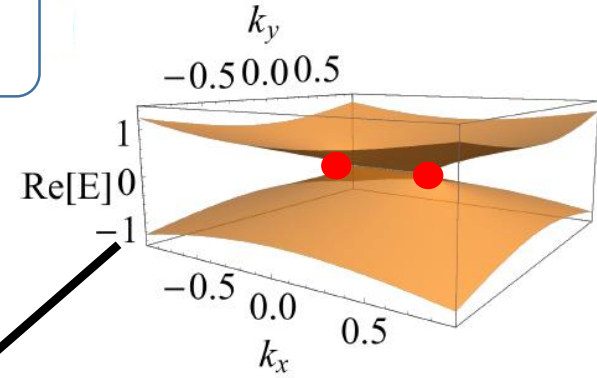


対称性

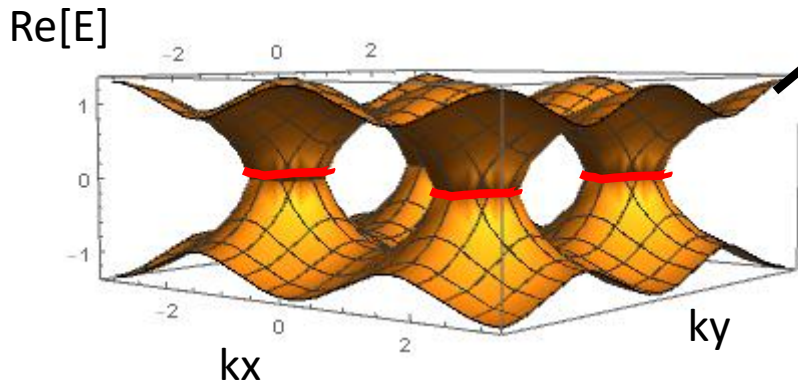
対称性に保護された例外円 in 2D

他の次元の場合

$$[\text{バンドタッチする領域の次元}] = [\text{ブリルアンゾーンの次元}] - [\text{バンドタッチの条件の数}]$$



Dimension	1	2	3
No symmetry	—	point	loop
With chiral symmetry	point	ring	surface



↖

↗

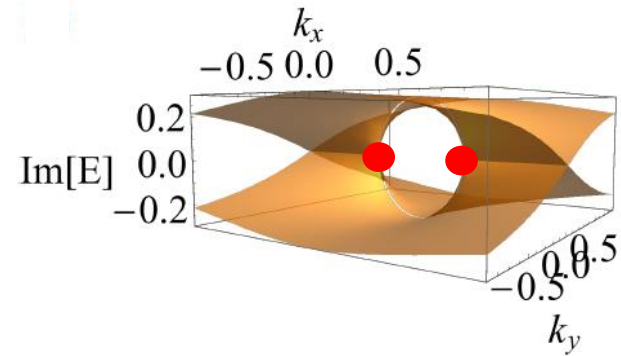
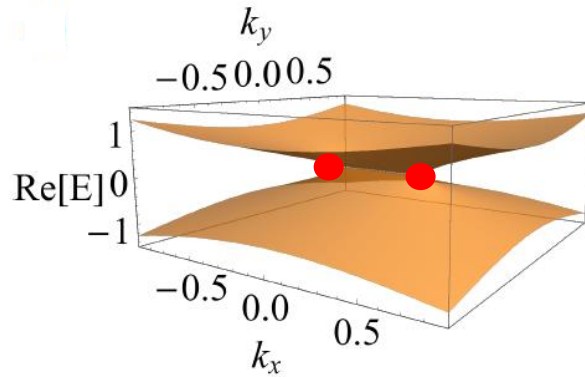
例外点の摂動に対する安定性

- ・2x2有効模型



- ・トポロジカル不変量

摂動に対する安定性: トポロジカル不変量による解析



バンドタッチが $E=E_0$ で起きるとき、

$$\det[H - E_0 \mathbb{1}] = 0$$



$$\det \tilde{H}_{E_0} = 0$$

$$\tilde{H}_{E_0} = \begin{pmatrix} 0 & H - E_0 \mathbb{1} \\ H^\dagger - E_0^* \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

カイラル対称なエルミートハミルトニアン (例, グラフェン)

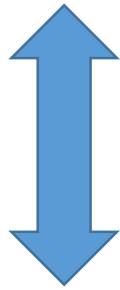
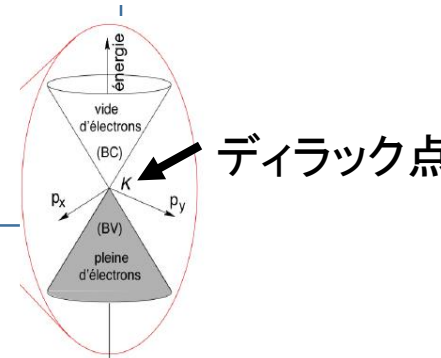
Z. Gong PRX (2018).

K. Kawabata PRX (2019).

対称性が無い場合

Winding# (エルミートなディラック点) _____ $H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & Q(\mathbf{k}) \\ Q^\dagger(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}$

$$W_H = \frac{1}{2\pi i} \oint d\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \log \det [Q(\mathbf{k})]$$



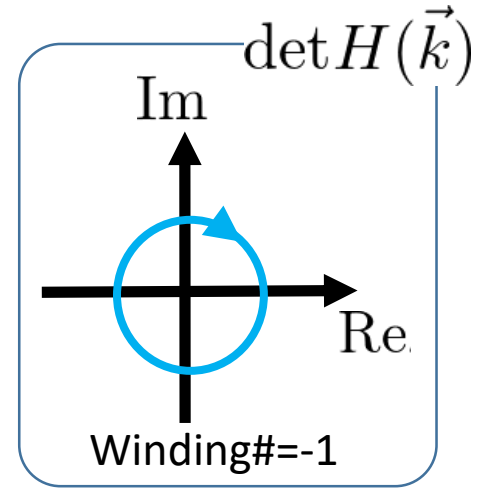
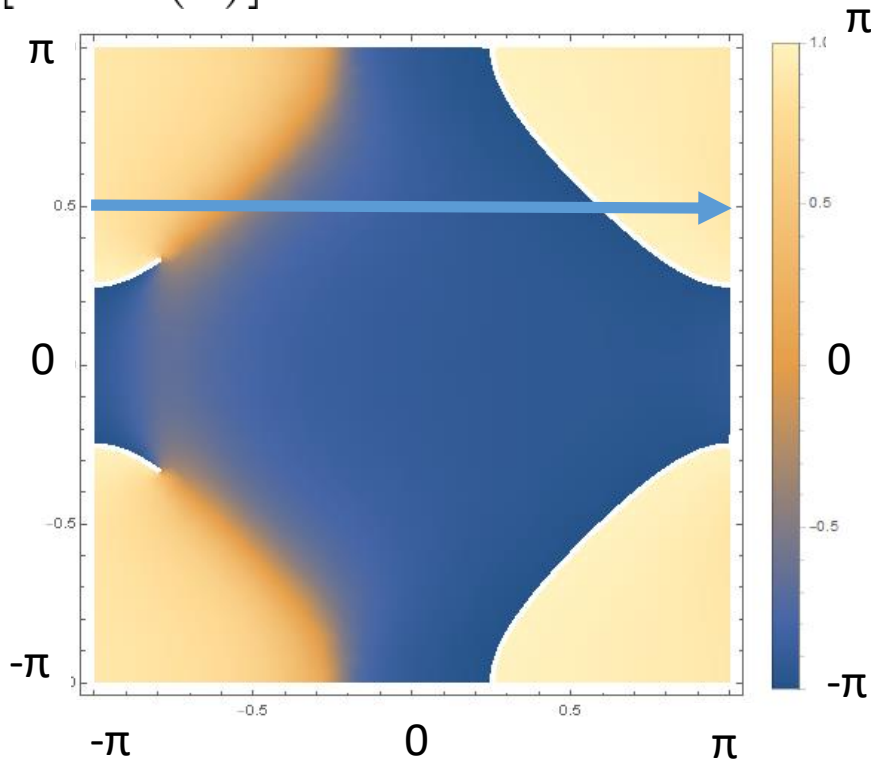
Winding数(例外点)

$$\tilde{H}_{E_0} = \begin{pmatrix} 0 & H - E_0 \mathbb{1} \\ H^\dagger - E_0^* \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi i} \oint d\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \log \det [H(\mathbf{k}) - E_0 \mathbb{1}]$$

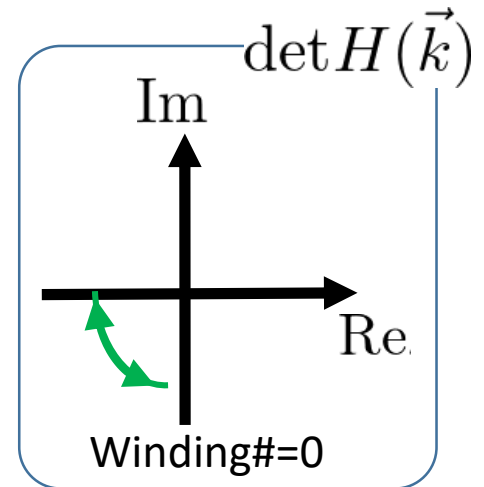
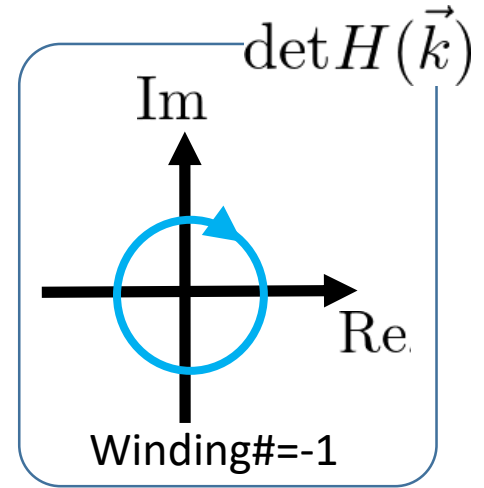
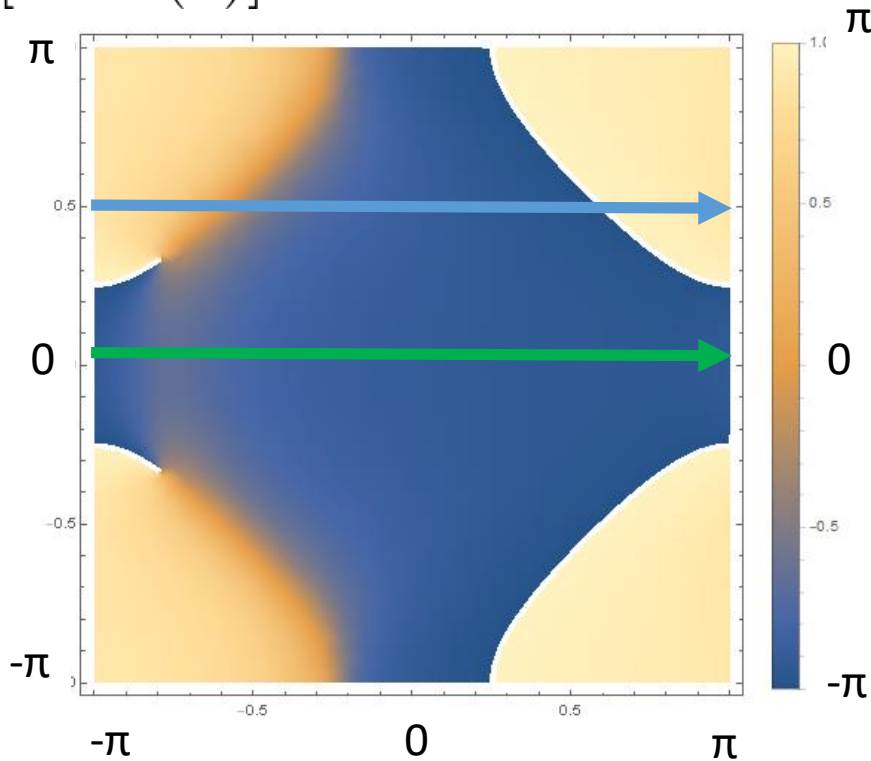
$$H(\vec{k}) = (\cos k_x + \cos k_y + 0.3 + 0.4i)\tau_3 + (1 + \sin k_x)\tau_1$$

$\text{Arg}[\det H(\vec{k})]$



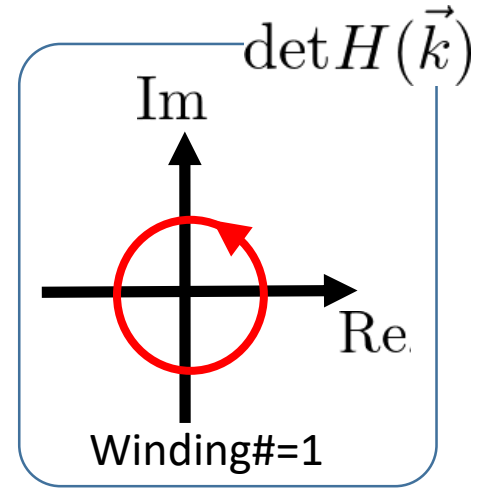
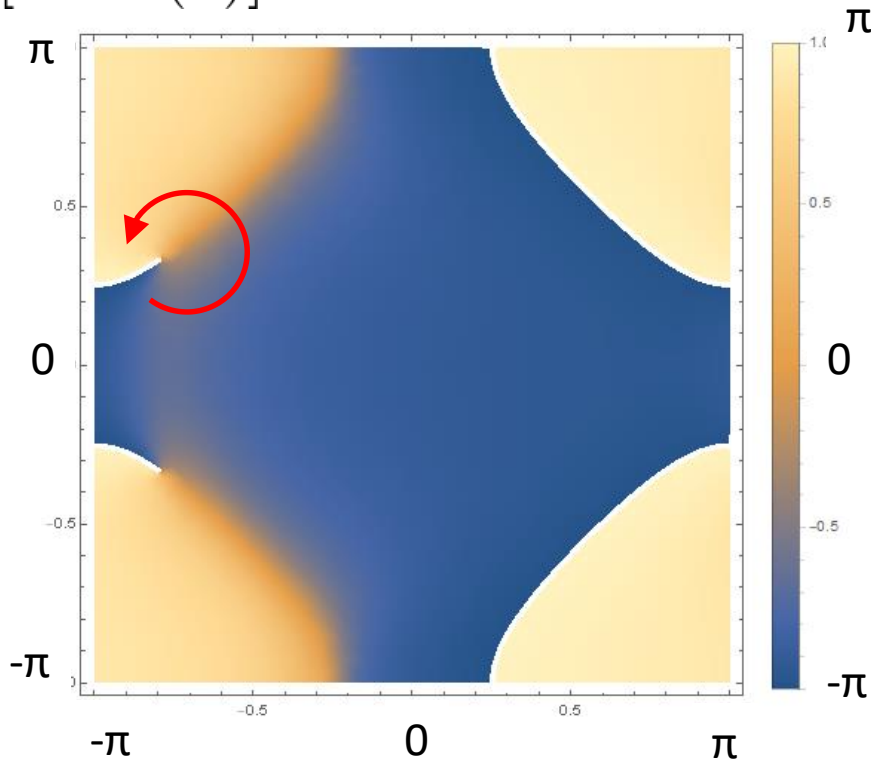
$$H(\vec{k}) = (\cos k_x + \cos k_y + 0.3 + 0.4i)\tau_3 + (1 + \sin k_x)\tau_1$$

$\text{Arg}[\det H(\vec{k})]$



$$H(\vec{k}) = (\cos k_x + \cos k_y + 0.3 + 0.4i)\tau_3 + (1 + \sin k_x)\tau_1$$

$\text{Arg}[\det H(\vec{k})]$



カイラル対称性がある場合

$$U_{\Gamma} H^{\dagger}(\mathbf{k}) U_{\Gamma}^{\dagger} = -H(\mathbf{k}) \quad U_{\Gamma}^2 = \mathbb{1}.$$

$$\tilde{H}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & H(\mathbf{k}) - E_0 \\ H^{\dagger}(\mathbf{k}) - E_0^* & 0 \end{pmatrix}_{\rho} \quad E_0 \in i\mathbb{R}$$

カイラル対称性がある場合

$$U_{\Gamma} H^{\dagger}(\mathbf{k}) U_{\Gamma}^{\dagger} = -H(\mathbf{k}) \quad U_{\Gamma}^2 = \mathbb{1}.$$

$$\tilde{H}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & H(\mathbf{k}) - E_0 \\ H^{\dagger}(\mathbf{k}) - E_0^* & 0 \end{pmatrix}_{\rho} \quad E_0 \in i\mathbb{R}$$

$$\tilde{\Sigma} \tilde{H}(\mathbf{k}) \tilde{\Sigma}^{-1} = -\tilde{H}(\mathbf{k}) \quad \tilde{\Sigma} = \mathbb{1} \otimes \rho_3$$

$$\tilde{U}_{\Gamma} \tilde{H}(\mathbf{k}) \tilde{U}_{\Gamma}^{-1} = -\tilde{H}(\mathbf{k})$$
$$\tilde{U}_{\Gamma} = U_{\Gamma} \otimes \rho_1$$

$$\tilde{U} = i\tilde{\Sigma}\tilde{U}_\Gamma \quad (\tilde{U}^2 = \mathbb{1})$$

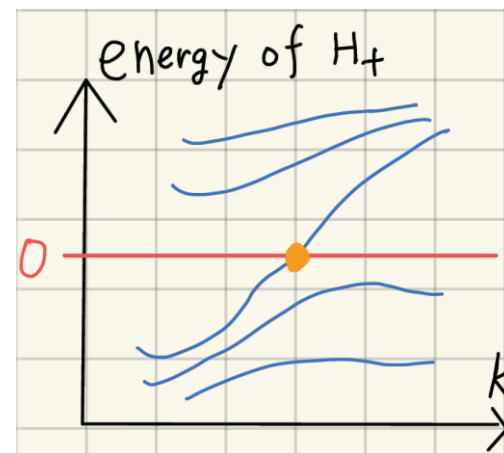
$$[\tilde{H}, \tilde{U}] = 0 \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}$$

H_+ のエネルギーバンドがゼロを横切るとき、
バンドタッチが起きる。

$$N_{0Ch} =$$

[H_+ の固有状態のうち、固有値が負のもの数]

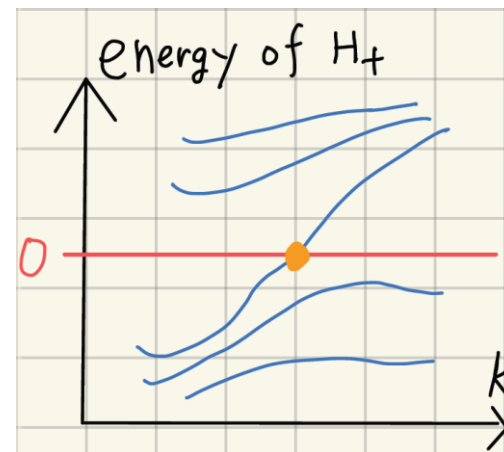
TY-Peters-Kawakami-Hatsugai PRB (2019)



$$\tilde{U} = i\tilde{\Sigma}\tilde{U}_\Gamma \quad (\tilde{U}^2 = \mathbb{1})$$

$$[\tilde{H}, \tilde{U}] = 0 \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}$$

H_+ のエネルギーバンドがゼロを横切るとき、
バンドタッチが起きる。



➡ $N_{0Ch} =$

[H_+ の固有状態のうち、固有値が負のもの数]

TY-Peters-Kawakami-Hatsugai PRB (2019)

$$H_+(\mathbf{k}) = i(H - E_0\mathbb{1})U_\Gamma$$

K. Kawabata et al., PRL (2019)

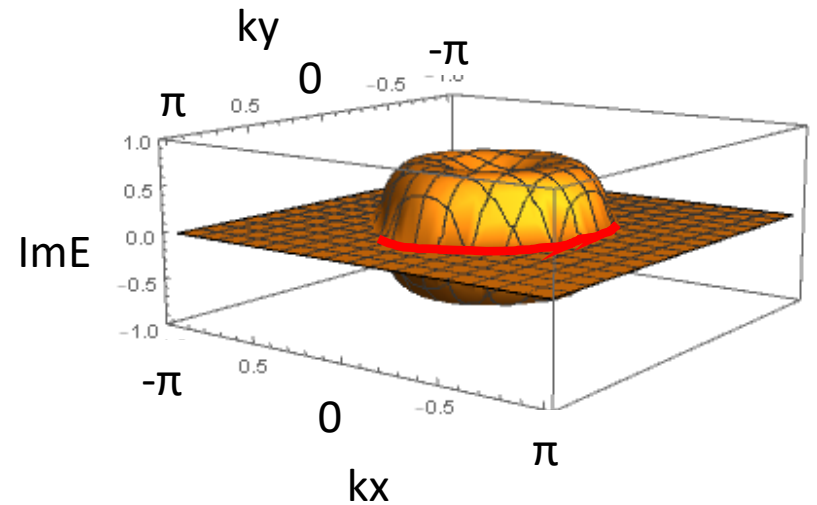
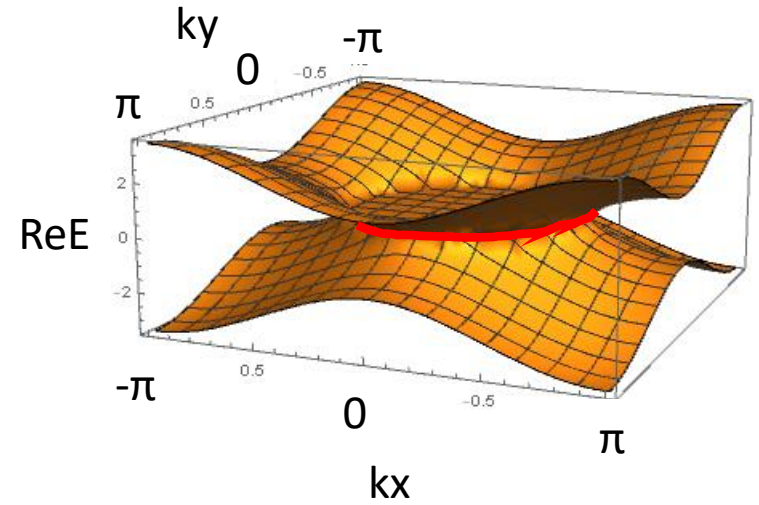
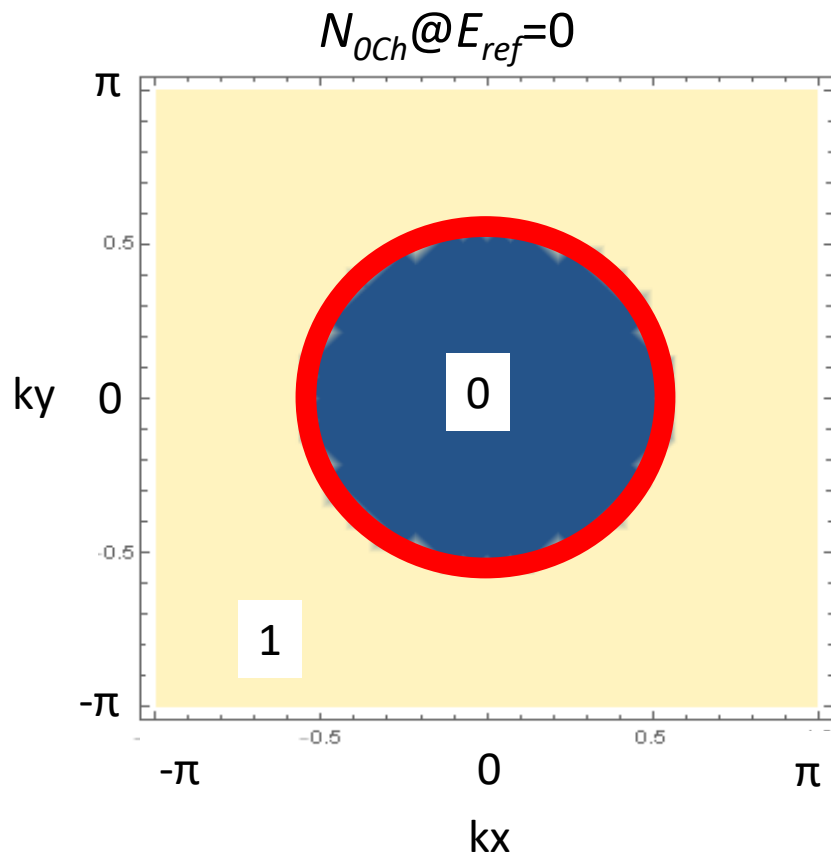
$$\therefore) \quad \tilde{U} = U_\Gamma \otimes \rho_2 \quad U_\Gamma^2 = \mathbb{1}.$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \\ iU_\Gamma & -U_\Gamma \end{pmatrix}_\rho \quad \tilde{V}^\dagger \tilde{H} \tilde{V} = \begin{pmatrix} iHU_\Gamma & 0 \\ 0 & -iHU_\Gamma \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V}^\dagger \tilde{U} \tilde{V} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$H(\vec{k}) = (\cos k_x + \cos k_y - 1.5)\tau_1 + i\tau_3$$

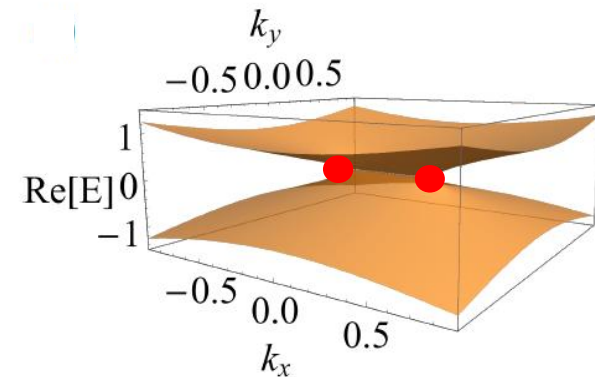
$$\tau_3 H(\vec{k}) \tau_3 = -H^\dagger(\vec{k})$$



1日目のまとめ

例外点:

- ・エネルギーの実部・虚部でバンドタッチを起こす点
- ・摂動に対し安定(点ギャップトポロジーによる保護)



Dimension	1	2	3
No symmetry	—	point	loop
With chiral symmetry	point	ring	surface

