線形代数の考え方

河 東　泰 之

線形代数は理系の大学生ならだれでも１年生で習う基本科目だと言ってよいであろう．それは抽象的な純粋数学から始まって，物理学，情報科学，工学，経済学その他のあらゆる分野で極めて役に立つからである．私の専門は作用素環論とそれに関係する数理物理学で，無限次元のヒルベルト空間上での線形代数にあたる問題を扱うが，線形代数の拡張，発展は基本的な研究対象であるし，さらに無限次元の問題が有限次元の線形代数に帰着するのもよくあることである．私は昔大学で線形代数を習ったとき，微分積分学は先にずっと続いていて奥が深いのに対して線形代数は底が浅いと言われたのだが，それは全く間違っていると思う．

量子力学は最初から無限次元の線形代数というべき関数解析と密接に関連していた．フォン・ノイマンの活躍に見られる通り，無限次元の数学がこの流れの中で大きく発展してきたが，近年注目を集めている量子情報に関係する分野では有限次元の線形代数そのものが重要な役割を果たすことが多い．最近各方面で大きな話題を呼んでいる量子コンピュータの数学的理論でも線形代数が決定的に重要である．そこではたとえばテンソル積の概念が必須だが，これは普通大学１年生で習う線形代数の範囲に入っていない．このことは入門レベルを超える線形代数までが応用において非常に重要であることを示す一例である．

またデータサイエンスの必要性が近年大きく叫ばれているが，ここでも統計的な処理における線形代数の果たす役割は極めて大きい．ビッグデータの処理，そこでの AI の活用，特にディープラーニングの急速な発展などが大きな話題となっているが，ここでも線形代数はあらゆる手法の基礎となっている．線形代数なしには話が一歩も進まないと言っても言い過ぎではない．

もっと前からある線形代数の応用としては暗号，符号の理論がある．これらにおいては特に有限体上の線形代数が重要である．私はこれについて普通とは違うオムニバス講義で説明したことがあるが，学生の反応に，線形代数がこういうことに役立つとは知らなかったというものがいくつもあった．数学の講義では普通抽象的な枠組みだけを説明するので，それがどのように役に立つかはあまり伝わっていないのであろう．しかしここまで述べたようにあらゆる方面に大きく応用できるような基礎だからこそ，世界中の多くの大学で１年生に教えているのである．

線形代数は長い数学の歴史の中では比較的新しい分野である．行列式など比較的古くからある話題もあるが，もう一つの基礎的な分野である微分積分学に比べても，さまざまな理論や道具が現在の形で整備されたのはかなり新しい．この歴史と関係するわけではないかもしれないが，高校でも微分積分学はかなり詳しく教えるのに対し，線形代数はほとんど教えていない．しばらく前までは１次変換として 2×2 行列のさまざまな性質が高校数学に入っていたのだが，今はなくなってしまっ

ている．このため大学１年生に線形代数を教える際も，以前は２次元の場合は知ってますね，と言って始められたのだが今はそうは言えなくなってしまった．

微分積分学やそれに関係する基礎的な物理学でも線形代数は重要な役割を果たす．例えばヤコビアンの果たす意義は言うまでもないであろう．また線形常微分方程式はその名の通りの線形性から，線形代数と密接に関係している．線形常微分方程式はしばしば大学の数学できちんと学ぶ前に大学の物理に出てくるのだが，線形代数，線形常微分方程式，それを使った物理という順番で学んだ方が適切だと思う．これも私が大学で教えたときの学生の感想に，物理で使うより前に教えてほしかったというものがたくさんあった．

本特集においては線形代数を入門レベルから始めて，それが様々な話題に関係していく様子を解説した．阿部氏の記事では，中学生がやるような連立１次方程式の解き方から始まって，ガウスの消去法，クラメルの公式，近似解法としての反復法などが基礎からていねいに解説されている．

それに続き，鈴木氏の記事では抽象的な線型変換 (線形写像) と具体的な行列の関係が２次元，３次元の場合を中心に説明されている．かつては高校数学で学んでいた２次元の場合から始まり，大学の線形代数に高校数学からよりつながりやすいような配慮がなされている．

戸松氏は次元について解説している．「次元」は日常用語でも使われる基本的な言葉で，１次元，２次元，３次元については多くの人が具体的なイメージを持っていることであろう．またそれに関連して，４次元に対して何か神秘的，超越的なイメージを持っている人もいるかもしれない．この記事では通常の次元概念の説明の後，作用素環によるその一般化とそれによるジョーンズ指数，カテゴリー理論との関連が解説されている．これは私自身も研究している現代数学の最先端の話題である．

小林氏の記事は２次形式についてである．２次形式は古くから研究されている話題であり，現在の線形代数のカリキュラムだと１年間の講義の最後の方に登場することが多い．この記事では極小値の求め方，平方完成法，円錐曲線などの基本的な話題から始まり，モース理論による幾何学との関連，格子点を通じた整数論との関連に及んでいる．

行列式は線形代数のかなり早い段階で出てくるものだが，その重要性のわりに初めて見るとなんだかよくわからなくなりがちである．山下氏の記事ではこれをより高い立場から解説した後，無限次元の作用素環の場合への拡張が述べられている．これも最先端の話題の戸松氏の記事とは別の側面である．

対角化，ジョルダン標準形は初等線形代数の偉大な到達点である．これらを目標にして１年間の線形代数の講義が設定されていることも多い．戸田氏の記事ではこれがより現代的な立場から解説されている．特に計量 (正定値内積) が入っている場合のことが詳しく述べられており，次元の高い空間上でラプラシアンを考えた場合に発展させられている．これは幾何学と (関数) 解析学が交わる現代数学の豊かなテーマである．

可逆な $n \times n$ 行列の全体は乗法について群をなす．これによって群論のアイディアや手法が行列の話に適用できる．関口氏の記事ではジョルダン標準形，２次形式，行列式など上のいくつかの記事で取り上げた話題についてこの視点からの解説がある．さらに，関口氏の専門である，行列のなす群の表現論からの発展的な話題が最後に取り上げられている．

ここまではすべて数学内部の話であったが，最後の大野氏の記事は量子情報についてである．ここでは通常の量子力学の設定を線形代数の枠組みで述べたあと，量子的なアルゴリズムの一つの例である探索アルゴリズム (グローバーのアルゴリズム) について詳しく説明している．量子計算の一例についての理解が深まるであろう．

以上合わせて線形代数を学びつつある読者もすでに一通り学んだ読者も，その広大な影響力と深みを味わっていただければ幸いである．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）