作用素環と量子情報

河 東 泰 之

1. はじめに

量子情報理論は近年華々しく発展しているが，その数学的側面は私の専門である作用素環論と共通する話題が多い．作用素環論の研究から量子情報理論に転じた人や，作用素環論と量子情報理論の両方を研究している人も少なくない．そこで作用素環論から見た量子情報理論について簡単に解説してみたい．

2. 完全正写像

量子情報理論ではしばしば，量子系の表現空間として有限次元ヒルベルト空間をとる．状態は密度行列と言われるこの空間の上の正作用素 (すなわち半正定値行列) で表される．合成系はテンソル積で与えられ，エンタングルメント状態もこの設定のもとで定義される．そして量子系の状態変化は完全正写像で与えられる．行列環から行列環への線形写像が，半正定値行列を半正定値行列に送るとき正写像と言い，任意サイズの行列環上の恒等作用素をテンソルしても正写像であるものを完全正写像と言うのである．たとえば行列の転置を取る操作は正写像だが，完全正写像ではない．

完全正写像は作用素環論では古くからよく調べられている対象であり，現在も作用素環論における必須の話題である．完全正写像のスタインスプリング表現[7] や，チョイの定理[2] がよく知られているが，このスタインスプリングやチョイも主に作用素環論の研究者である．10 年以上前に東大の作用素環セミナーでチョイに講演してもらったことがあるが，その時量子情報の人が，有名なチョイを見られてうれしいと言っていたことを思い出す．またエントロピーの関するコンヌとの共著論文[4] などで有名な，作用素環のスターマーにも，完全正写像の古い論文があるが，自分の古い論文が量子情報の研究者によく引用されている，と言っていたことがあった．

量子情報では主に有限次元のヒルベルト空間を考えるため，作用素環論で無限次元ヒルベルト空間に特有の現象を研究していると，有限次元は易しいというような印象を抱きがちであるが，そのようなことはなく，有限次元でも十分に難しく，また興味深い現象が起こるのである．上述のチョイの言葉として，2×2 行列はかなりやさしいが，3×3 行列は十分に難しく，無限次元に近い，というものがある．私は昔，大学 1 年生の時の講義で，微分積分学は底が深くずっと先までつながっているが，線型代数学は底が浅い，と言われたことを覚えている．今考えてみるとそのような見方は全く間違っていると思う．

3. エントロピーと冨田竹崎理論

密度行列のフォン・ノイマン・エントロピーと言うものが古くから知られている．これは密度行列

の固有値から定まる有限確率分布のシャノン・エントロピーと同じものである．これについては様々な拡張，一般化が知られており，それらに関して凸性や劣加法性を表すさまざまな不等式が証明されている．これらの概念は量子情報理論において重要な役割を果たすものである．作用素環論の立場からは，これらのエントロピーはもっと一般的な作用素環上でも定義できるため，それらの性質を調べることが重要なテーマになってきた．たとえば，上述のコンヌ・スターマーのエントロピーは II_1 型因子環と呼ばれる作用素環の上で考えられたものであるが，これはジョーンズによる部分因子環の理論において大きな役割を果たすことが，ピムスナー，ポパ[6] によって示されている．これは部分因子環の解析的な分類理論において重要である．

一般的な作用素環上である種の相対エントロピーを定義しようとすると，相対モジュラー作用素と呼ばれるものが現れる．これは冨田竹崎理論から生じるもので，相対エントロピーの定義と基本的な性質の証明は荒木[1] による．本来この概念は III 型フォン・ノイマン環と呼ばれる無限次元の作用素環で考えられたものであり，数理物理学との関係でいえば，量子統計力学や場の量子論の研究において重要なものであるが，量子情報理論における有限次元の行列環の場合でも十分に示唆的で興味深い量を与えている．

4. コンヌ埋め込み問題

現在の作用素環論においてもっとも有名な問題に，コンヌ埋め込み問題と呼ばれるものがある．これはある種の一般の作用素環が，有限次元による近似を許すかどうかという種類の問題で，もともとコンヌのフィールズ賞論文[3] で導入されたものである．当初は技術的な問題であるかのように思われていたのだが，その後次々と，作用素環論におけるまったく予想外の重要問題に言い換えられることがわかり，多くの研究者の興味を引いているものである．特にキルヒバーグによる，C^* 環のテンソル積に関する問題への言いかえが有名である．さらにもともとの形も，現代の立場からは自由確率論と言われるある種の非可換確率論での重要な問題と解釈できる．

このようにコンヌ埋め込み問題は様々な同値な言いかえがあるのだが，その中に量子情報に関連したものがある．まず，正作用素値測度を用いて，独立した 2 つの系の間の量子相関関係を表す方法が 2 種類考えられる．(正作用素値測度は，射影値測度を一般化したもので，量子系の測定を表している．) これらが一致するかどうかを問うのが量子情報におけるチレルソンの問題である．これは完全に行列に関する問題として述べることができる．小沢[5] はこれがコンヌ埋め込み問題と同値であることを示した．これはコンヌ埋め込み問題の新しい言いかえであり，この問題が当初の予想を超えて，大きく広がっていることを示すものである．

なお，私を含め多くの研究者は，コンヌ埋め込み問題の解答は否定的であると考えているはずである．この見方の量子情報理論的意味は何であろうか．さらに研究の進展が待たれるところである．

参考文献

1) H. Araki, Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **11** (1975/76), no. 3, 809–833.
2) M. D. Choi, Completely positive linear maps on complex matrices, Linear Algebra and Appl. **10** (1975), 285–290.
3) A. Connes, Classification of injective factors. Cases II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$, Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 1, 73–115.
4) A. Connes, E. Størmer, Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras, Acta Math. **134** (1975), no. 3–4, 289–306.
5) N. Ozawa, About the Connes embedding conjecture: algebraic approaches, Jpn. J. Math. **8** (2013), no. 1, 147–183.
6) M. Pimsner, S. Popa, Entropy and index for subfactors, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 1, 57–106.
7) W. F. Stinespring, Positive functions on C^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, (1955). 211–216.

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）