

作用素環の研究

河東 泰之

1. 作用素環を始めた頃

一口に作用素環と言っても様々な話題があり、みんなで同じ研究をしているわけではない。本稿では、私や私の元学生が作用素環のどのようなテーマをどのように研究してきたかを書いてみたい。私はまだ昔話をする長老の年ではないと信じていたが、日本の現役研究者の中ではかなり年上の方になってきたのも事実なので、このような話題について書くことにした。

私が作用素環というものを初めて知ったのは中学1年生から2年生にかけて(1975年～1976年)のことである。荒木不二洋先生が数学セミナーに書いていた記事を読んだからである。今思えば、当時は Connes による大革命が一段落したところであったのだが、もちろんその頃そのようなことはわからなかった。その後中学3年生の時に数学の洋書専門店に W. Arveson の “Invitation to C^* -algebras” (Springer GTM) を手にした。題名を見て、これは荒木先生が書いていたテーマについての本だと思ってすぐに買った。これは比較的薄い本で、それでも全部分かったわけではなかったが、作用素環論の基礎、すなわち C^* 条件の使い方、スペクトルの様々な性質、GNS 表現などはこの時この本で学んだのである。(この本のためには関数解析の予備知識が必要だがそれはすでに知っていた。)

その後高校生の間は Nonstandard Analysis の

本をいくつか読んだほかは主にコンピュータをやっていたので作用素環の勉強は進まなかった。作用素環に再び巡り合ったのは、1984年、東大数学科の4年生になるにあたってセミナーの本を選ぶことになったときである。当時の東大数学科は教授の数が8～9人で今よりずっと少なかった。たいいてい先生は自分の研究テーマに近い本を候補に挙げていたのだが、小松彦三郎先生はメインの線形偏微分方程式の本のほかに R. G. Douglas の “ C^* -algebra Extensions and K -homology” を挙げていた。これは自分になじみのあるテーマだ、と思ったこと、関数解析に関係したことをしたかったがホモロジー代数にも興味があったことからこの本を選ぶことにした。何度かこの本を候補に挙げたがこれまで誰も選ばなかった、と小松先生に言われたこともこの本にしようという気持ちを後押しした。この時より少し前、1982年に Connes が作用素環論初のフィールズ賞を受賞していて、その解説記事をたくさん読んでいたこともプラスの方向に働いたと思う。また竹崎正道先生の『作用素環の構造』はこの前の年の秋に出版されており、この本は私が手当たり次第に買った本の中に入っていたこともあった。

あの時小松先生が作用素環の本を挙げていなければ、私は作用素環を専攻していなかったであろう。小松先生の専門は全然作用素環ではなかったのだから、よく作用素環の本を挙げたものだと思う。現在私の学生はかなり幅広い範囲の研究をし

ていると思うが、それはあくまで作用素環の範囲にとどまっている。全く作用素環ではないような学生を取ったことはなく、小松先生の受け入れ範囲の広さは驚きである。

この Douglas の本は薄い概説書で、定義や証明がきちんとついている本ではなかった。そこで原論文を読まねばならず、本には「計算すればわかる」と書いてあるところが実は数ページの証明を要する内容であるなど、今思うとあまり親切な書き方とは言えない本であった。

2. アメリカ大学院留学

4年生の夏休み前に、小松先生から大学院はアメリカに行ったらどうかと勧められた。小松先生のところではこの後、私の2年下の人がソ連に、3年下の人がフランスに留学しており、当時としては珍しく、よく留学を勧めていたのである。夏休みの間に英語の試験 TOEFL などを受けて、9月に東大の修士課程入試に合格してから本格的に留学の準備を始めた。当時は電子メールは全く普及していなかったので全部郵便で連絡を取った。作用素環の有名な人がいるところということで、上述の本の著者の Douglas のいた New York 州立大学 Stony Brook 校、小松先生の知り合いだった竹崎先生とさらに Effros のいた California 大学 Los Angeles 校 (UCLA)、Rieffel と Arveson のいた California 大学 Berkeley 校に出願して全部受かったが、小松先生の勧めにより UCLA に行くことにした。秋に日本数学会の年会か東大であり、そこで荒木先生にも初めて会っていろいろ相談に乗ってもらい、推薦状も書いてもらうことになった。Jones が華々しく活躍しているということもこのとき荒木先生から聞いた。(正確には Jones 多項式の preprint が回ってきたのはこの年の前半であり、服部先生からこれを見せてもらっていたが、なぜ作用素環が結び目と関係するのか全く理解できなかった。) Jones にも留学相談の手紙を書いたが、当時私の興味があったのは C^* 環の K 理論だったので、話はほとんどかみ合わなかった。ま

た当時はインターネットも一般人が使えるものではなかったので、preprint は著者に手紙を書いて送ってもらうものだった。私は K 理論や指数定理関連の preprint をかなり集めていた。Kasparov の、当時入手困難だった preprint も本人から送ってもらってなんとなくうれしかったことを覚えている。

1985年の4月に東大の大学院に入学したが、7月にすぐにアメリカに渡った。本来は Lebesgue 積分や上級複素解析、多様体論、ガロア理論などについて授業を受けてからそれが身についているかどうかの試験を受けるものなのだが、こういった科目はすべて日本で習っていたので授業が始まる前に4科目の試験をまとめて受けることにした。Qualifying Examination, Preliminary Examination などと言われるものである。何度も落ちると退学になってしまうのだが、事務の人は何も知らない留学生が無謀な受験をしていると思ったらしく、落ちてもノーカウントにしてあげるからね、と親切に言ってくれたが、もちろん楽勝で全部受かった。アメリカの大学(院)では宿題がたくさん出て大変だというようなことがよくあちこちに書いてあるが、宿題が出るような授業はこれらの入門講義だけで、私はそれらを全部飛ばしたので、そういう授業は一つも取ったことがない。

アメリカでは、学生が本の内容を一行ずつ細かくフォローして発表するという日本式のセミナーはほとんど行われていないのだが、先生が竹崎先生であったため、UCLA ではこの方式のセミナーをやることになった。本は Blackadar の “ K -theory for Operator Algebras” である。正確にはこの本は当時まだ出版されておらず、原稿を印刷したものをセミナーで使ったのであった。この1年目の間に Berkeley でミニ集会有り、そこで初めて Jones の講演を聞いた。彼はまだフィールズ賞は取る前だったが、十分有名な大物であるということとはよくわかっていた。

1年後、1986年の夏に Berkeley で ICM が開かれた。作用素環のサテライトコンファレンスもその前に Santa Barbara で開かれ、当時の主要

な研究者の多くがアメリカにやってきた。Connes や Haagerup, Voiculescu, のちに共同研究する Evans にもこの時初めて会った。

その次の年にはセミナーで Jones や Wenzl の subfactor の論文, さらに Popa の原稿 “Correspondences” を読んだ。この原稿は重要な基本文献なのだが, なぜか今でも未出版である。これによって私はのちの専門となる subfactor 理論 (部分因子環論) の基礎を学んだ。Popa は当時ルーマニア在住で, 共産主義体制は盤石に見えたため, 西側に出国することは大変難しいと聞いていた。(仲間の Ocneanu, Voiculescu はすでに亡命に成功し, アメリカに来ていたが。) しかし多くの人の努力により Popa は 1987 年夏にルーマニアを脱出し, UCLA の教授になった。1987 年の夏にはイギリスの Warwick 大学で, Evans を責任者の一人として作用素環のプログラムが開かれており, 竹崎先生について私も 2 カ月間 Warwick に滞在した。ヨーロッパに行ったのはこれが初めてであった。この時 Ocneanu の「Jones 指数 4 未満の subfactor の分類」の講演を聞いて大変衝撃を受けた。このことはのちの私の研究に大きな影響を与えた。さらに, のちに共同研究する Longo にもこの時初めて会ったがあまり話さなかったもので, 彼はあまりよく覚えていないようである。

1987 年の秋には Bisch が UCLA に新しい院生として留学してきた。彼は私と同じ年なのだが, ドイツで修士相当の勉強をしてきたため UCLA に来たのは私の 2 年遅れであった。セミナーは Atiyah-Singer の指数定理関連のものを読んだ。この年は Popa が授業をするようになって, これは大変すばらしいものだった。私は von Neumann 環関連の重要な事項はかなりの程度までこの授業で学んだ。Kadison 問題と呼ばれていたものの彼自身による解決も授業で解説したのだが, 「この問題を初めて見たとき, これは簡単だ, 自分には解ける, と思った。難しいと思ってしまうとそれが心理的障害になって解けなくなるのだ」と言ったことをよく覚えている。Popa の授業は最初 1 学期で終わるはずだったのだが, 私が学生の意見を集めて, もう

1 学期延長してください, という願いを数学科に提出し, その結果実際に延長になった。

1988 年から 1989 年にかけては竹崎先生がサバティカルでパリの IHES に行くことになったので私もついて行った。Connes は前に会ったことはあったがちゃんと話したのはこの時が最初である。Connes のセミナーは当然フランス語で行われていたのだが, この年は竹崎先生のため英語になった。一度竹崎先生が用事で遅れたことがあり, その時は当然のようにフランス語で始まり, 竹崎先生が到着したところで英語に切り替わったのを覚えている。IHES のアパートでは博士を取ったばかりの Taylor と同じ建物 (食堂, リビング等は共用) に住んでいた。彼はその後, Wiles と協力するなどして数論の超大物になった。彼と話していた時, イギリス人はあまりアメリカに留学しないが, 彼の場合は, イギリス人の有名な先生が Princeton にいたので院生として留学したのだ, という話を聞いたのだが, あとで思えばこれが Wiles のことであった。

この年度にはスウェーデンの Mittag-Leffler 研究所で作用素環のプログラムが開かれており, そちらにも竹崎先生について 1 カ月ずつ 2 回行った。Haagerup は主催者の一人で, このとき初めていろいろと詳しく議論することができた。

この年で私の院生生活は終わり, UCLA の博士号を取って 1989 年 6 月に東大に助手として就職した。アメリカで就職するという話もあったが, 私は 22 歳の時に結婚しており, 妻が日本で働いていたのでこのタイミングで日本に戻ることにした。これ以来ずっと勤務先は東大である。

3. 東大での新米時代

当時の助手は最初から任期無しの職であり, 仕事も大してなく, 研究に専念できる大変良い環境であった。博士論文で研究した作用素環上の群作用の分類から研究テーマを変えたいと思っていたが, あまり大した進展はなく 1 年が過ぎて 1990 年の夏になった。この年は京都で ICM があり, 多く

の大作が日本にやってきた。フィールズ賞受賞直前の Jones も東大にやってきて談話会講演を行った。Jones がフィールズ賞だということは公然のうわさとなっており、談話会は広い教室に立ち見も出るほどの大盛況だった。複雑な結び目の絵をすらすらと黒板に描いたのを覚えている。さらにこれに続けて、荒木先生の依頼で、Ocneanu の連続講演を東大でやることになった。Warwick での講演以来 3 年が過ぎていたが、彼は論文を最後まで書かずじまいだったので、当時多くの重要なポイントが不明のままであった。Connection と string algebra という構成が彼の理論の中で重要なのだが、当初それは謎に包まれていた。彼の講義でこの説明があり、この時私は一瞬で多くの重要なポイントを理解したという気分になることができた。その後彼は三四日朝から夕方まで通して講演し、多くの興味深いことを学ぶことができた。しかし一か所肝心のポイント (のちに Ocneanu の compactness argument と呼ばれるようになったもの) については何かごまかしているような気がしたので、中華料理屋での昼食の際に細かく質問したところ、彼は食卓のナプキンに図を書いて詳しく説明してくれた。この瞬間に私は主要なポイントをすべて理解することができた。これは Jones にも必ず Ocneanu に質問しろ、と言われていた要点であり、これによって私は subfactor 理論を研究する決意を固めた。なお Ocneanu は語学の達人であり、午前の講義の終わりに「午後の講義は 2 時から始まります」などと日本語で黒板に書いていたのを思い出す。奈良で開かれた ICM のサテライトコンファレンスでは、彼は松尾芭蕉の言葉などもすらすら書いていた。

当時泉正己氏は京大数理研の修士 2 年生であり、Longo の sector 理論を応用して subfactor 理論の研究を進めていた。1990 年の暮れごろ彼とコンタクトを取り、多くのことを彼から学んだ。当時は会うたびに新しい衝撃的結果を示してくるので大変驚いた。そのうちの一つは共著論文に結びついた。

さらに 1991 年の年明けに京大数理研のセミナーで私の subfactor 理論での初の成果の発表をした

ところ、聴衆に Evans がいて、それは可解格子模型で知られている orbifold construction というものだと教えてくれた。ここから彼との約 9 年にわたる共同研究が始まったのである。

4. 再びアメリカへ

Berkeley には Miller fellow という格の高いポスドクポストがあるので、これに応募してはどうか、と 1990 年秋に竹崎先生に勧められた。私が留学しようとしていた時に比べ、Berkeley の作用素環には Jones と Voiculescu が加わっていた。またアメリカに行きたいと思ったのでこれに応募したところ、めでたく採用になった。作用素環では私の前に、Ocneanu, Wassermann ともこのポストに就いており、また作用素環ではないが、Poincaré 予想の Perelman も私の 2 年後にこのポストに就いた。本来このポストは 2 年間のものなのだが、この採用決定とほぼ同時に東大の方でも専任講師への昇任が決まり、専任講師で 2 年抜けるのは困るのでアメリカ行きを 1 年に縮めてほしい、と言われた。仕方ないのでその通りに 1 年にした。

Berkeley に行ってみると、その頃の Jones のセミナーには量子群のポスドクの Rosso, UCLA 時代と同じく院生だった Bisch (Popa のところで学位取得), Ocneanu のところで学位を取った岡本氏、院生の Xu などがいて大変活発に研究が進んでいた。私の研究も大きく進み充実した 1 年であった。Xu はこの後、私と研究上で密接に関係しあうことになる。この 1 年の間には、Haagerup に呼ばれてドイツ Oberwolfach の研究集会とデンマーク Odense 大学に行き、彼と subfactor の話をいろいろしたのが大変有益であった。現在 Haagerup subfactor と呼ばれているものの構成についても、このとき彼からいろいろ習うことができた。

また Evans がイギリスから Berkeley に 3 週間ほどやってきて共同研究し、こちらからもイギリスの Swansea に 3 週間ほど行ってさらに共同研究を進めることができた。私は当初数理物理についてはほとんど無知だったのだが、Evans は幅広

いことをよく知っており、あれとこれが関係している、と言ったことをよく教えてくれた。

この Berkeley 滞在中に、私の最初の学生 Winsløw がデンマークの Haagerup のところからやってきた。私が東大に戻るのに合わせて彼は東大の博士課程に入学した。

5. 代数的場の量子論

Evans との共同研究を通じて、統計力学、格子模型、量子群、位相的場の量子論などと subfactor 理論の研究を進めるようになった。これらの成果は 1998 年に Evans とオックスフォード大学出版会から出版した 800 ページ超の本 “Quantum Symmetries on Operator Algebras” にまとめることができた。しかし少し違う方向に研究をシフトしたいと考えるようになっていた。本を出版するより少し前、1996 年にローマで大きなコンファレンスがあり、招待されて講演した。そこで主催者の Longo と話し、1997 年秋、1998 年秋にローマに滞在することになった。彼がやっていた subfactor 理論と関係する数理論は代数的場の量子論と呼ばれるものであるが、私は当初これについて勉強したことがなく、全く何も知らなかった。1999 年に Longo, Müger と書いた完全有理性についての論文での共同研究を通じて私は代数的場の量子論を学ぶことができた。これはいきなりやったにしては大変うまくいき、私のこの方面での有名な論文となった。その後は主に Longo との共同研究を通じて代数的場の量子論、特に 2 次元共形場理論と subfactor 理論の関係を研究している。学生の頃は私は全く物理に興味がなく、あんなものは厳密でない怪しい理論だと思っていたのに、最近ではもっぱら数理論物理ということになっており、いろいろと変われば変わるものである。

20 年近くの Longo との共同研究では、Rehren, Carpi, Bischoff など Longo の共同研究者たちも加えていろいろな人たちと共同研究を進めた。共形場理論の様々な形について作用素環の立場からいろいろな論文を書いた。このためローマには 28

回出張した。中でたぶんもっとも有名なものは、2002 年に Longo と書いた、中心電荷が 1 未満のカイラル共形場理論の完全分類の論文と、2015 年に Carpi, Longo, Weiner と書いた、頂点作用素代数と作用素環の局所共形ネットの対応をつけた論文であろう。これらはうまくいったと思う。特に前者はローマ滞在の短い期間中に仕上げることができた。後者はムーンシャイン予想との関連を研究した時からやりたいと思っていたのだが、Carpi の活躍もあり、期待通りの結果を出すことができた。

6. 学生の指導

教員になってから二十数年の間に、私の元学生は約 20 人が数学者になった。初期の学生たちはみな、私と同じく subfactor 理論を専攻していた。最初の Winsløw から川室圭子氏までである。(川室氏はその後アメリカに渡って低次元トポロジーに転向した。) その中でももっとも目立った結果は浅枝マルタ氏による Asaeda-Haagerup subfactor の構成である。1997 年 3 月に私がデンマークに行った際に浅枝氏はついてきて、Haagerup との議論の末、ほぼ 1 カ月の滞在中にこの構成に成功した。彼女は当時 23 歳であった。

私は自分が UCLA に留学して大変よかったと思っていたので、学生にも外国に行くことを積極的に勧めていて、この頃は学振特別研究員 (DC) でお金を確保して、アメリカかヨーロッパの関係者のところに 1 年くらい行くというのが私の学生の基本パターンになっていた。

さて一方、小沢登高氏が私の学生になったのは 1996 年のことであった。前年に 3 年生の Fourier 変換の授業で教えていたので彼のことは知っていたが、4 年生の最初のセミナー選択では別のところに行っていて、私のところには来なかった。しかし大学院入試の出来が素晴らしく、かつ作用素論・作用素環論をやりたいということだったので、秋から私のセミナーに入れたのである。当時の規則では 4 年生の途中から私のセミナーに変えることはできなかったのであるが、事務的に強くとって特例

で変えてもらうことができた。彼は最初普通に作用素環の基礎を学んでいたのであるが、彼の1年上の学生二人に私は作用素空間の本を読ませていた。私はこの話題にUCLA時代になじみがあったのと、この二人は博士課程には進まないということだったので、割と軽い話題のつもりでこれを選んだのである。小沢氏はこれに興味を覚え、しばしばこの二人のセミナーで私の知識を超える高度のコメントをするようになった。私と当時東大数理の助教授であった泉氏には教えられる範囲を超えていると思ったので、アメリカのPisierのところへ留学することを勧めた。さらに彼が修士1年生の秋から、新しい形態の授業というものが始まり、私と学生が交互にでもセミナー形式でやってみるかと思っていたのだが、小沢氏が発表したいというので初回にやってもらったところ、あまりに素晴らしいので結局この「授業」は一学期間すべて小沢氏が担当したのであった。

修士論文以降、小沢氏は素晴らしい論文を書きまくり、博士課程を1年で修了して2000年に東大の助手になった。東大数理は1992年の改組で大幅に助手ポストをカットしたため長い間新規の助手を取ることができなかつたのであるが、ちょうどこのときに空きポストが出たのは(東大数理にとって)大変ラッキーであった。さらに博士論文審査の直後、まだ博士課程に在学しているときに、小沢氏はexactnessについての有名未解決問題を解決して、非常に大きな国際的インパクトをもたらした。

小沢氏はその後もどんどん研究テーマを広げていき、次々と驚くべき結果を出し続け、世界的なスターになった。私は具体的な指導は全くしていないが大変すばらしいことである。なお小沢氏が海外学振特別研究員に応募して面接審査を受けた際、実験系の審査員から、「あなたは指導教員との共著論文が一本もないが、仲が悪いんですか」と聞かれたそうである。数学ではあまり学生と共著論文は書かないものだが、小沢氏の場合はそもそも研究テーマが異なっており、共著論文どころか、お互いの論文を引用したことも1回もないはずで

ある。

小沢氏以降、私の学生の研究テーマは、私と違っていてもよい、むしろ違うことを推奨するというようになった。そのため院生のうちから積極的に海外に長期間出ることという方針はさらに重要性を増した。幸いにして私のところでは国費留学生以外はほぼ全員が学振特別研究員(DC1, 2)に通っており、最近は一リーディング大学院の経済的援助も受けられるようになったので、今までのところこの方針でやってきている。自分と違う研究テーマでよい、積極的に海外に送り出す、という方針は小松先生の影響を受けていると思う。中には向こうに正規に留学してそのまま向こうに残る人も出てきている。たとえば谷本溶氏はローマ大学で博士号を取り、現在ローマ大学のポストに就いている。

また緒方芳子氏は私の学生ではなかったが、2001年に東大物理の博士1年の時から私のセミナーに出入りして発表もしており、私のグループと交流があった。緒方氏の研究テーマは(作用素環を用いた)量子統計力学で、私とは違っているがそれなりに関係することはいろいろある。緒方氏は2009年以来東大数理の同僚として活躍している。

今年は私のところで4人の博士号取得者が出た。そのテーマは、代数的場の量子論、作用素環の量子群、 K 理論と幾何学的応用、 C^* 環と公理的集合論で、一人以外は私と大きく離れている。代数的場の量子論の一人についても上述の谷本氏がいろいろ面倒を見てくれたので、私は具体的な指導はしていない。最近ではほぼこのようなペースである。幸いにして私のところには次々と大変優秀な学生が来てくれるので、国際的に見ても広い範囲、高いレベルで博士号が出せていると思う。私のところは院生の数も多く、現在はピーク時より少し減ったとはいえ、11人である。これがいつまで続けられるかわからないが、これからも頑張りたいと思う。

(かわひがし・やすゆき, 東京大学大学院数理科学研究科)