

作用素環の考え方

河東 泰之

1. 初めに

私の専門は作用素環論 (と数理物理学への応用) である。作用素環論は通常分類だと関数解析の仲間であるため、本特集に入っているものと思われる。作用素環論の研究のための道具が関数解析的手法であることは間違いなく、そのため作用素環論を学ぶためにはまず関数解析を学ばなくてはならない。しかし、作用素環論特有の考え方にはまた独自のものがあり、必ずしも関数解析的考え方と一致しているわけでもない。本記事では作用素環論に現れる基本的な考え方と現在の研究動向を解説したいと思う。

作用素環はその名の通り「環」である。このように代数学を考えるとということが、他の解析系の話題に比べたときの特徴である。代数学では群、環、体などの代数学を考える。特に数の体系といったとき、いちばん基本的なものは体である。数というからには、四則演算ができてほしいからである。数は数学にとって最も基本的な対象であるが、量子力学の教えるところは、数を用作用素 (演算子) で置き換えなくてはならないということである。(バナッハ空間、さらにはもっと一般的な線形空間の上の作用素を考えることも可能であるが、量子力学との対応で一番自然なものはヒルベルト空間上の作用素である。以下これについてのみ考える) そこで作用素のなす体のようなもの考えることになるが、二つの問題がある。数の場合は逆元を持

たないものは0だけであるが、作用素の場合はそうではないことが、行列の場合でもよく知られている。したがって体を考えることができない。そのため逆元の存在についてはあきらめて、体の代わりに環を考えることにする。もう一つの問題は、量子力学に現れる (自己共役) 作用素はしばしば非有界であるため、二つの作用素を足すだけでも、定義域の問題がやっかいになることである。これを回避するには、ヒルベルト空間全体で定義された有界作用素だけを考えればよい。これによってヒルベルト空間の上の有界作用素からなる作用素の環を考えることに至る。だいたいこれが作用素環論の研究対象であるが、もう少し正確に言うにはあと二つの条件を追加しなくてはならない。

一つ目の条件は量子力学において自己共役作用素が観測可能量を表していることから来る。作用素のなす環を考えようとすれば、自己共役でない作用素も仲間に入れなくてはならなくなるが、それらについても自己共役部分が取れるようにするためには、環が*演算 (行列の共役転置演算の無限次元版) で閉じていることを要請する必要がある。この条件を満たす環を*環と言う。作用素環論では通常、作用素のなす*環を考える。(*演算で閉じていない環を考えることもできるが今のところ興味深い理論はあまりできていない。) *演算を考えられるのは単なるバナッハ空間ではなくヒルベルト空間の上の作用素を考えているからで、ヒルベルト空間の内積の存在が本質的に効いている

ことに注意する。

もう一つは関数解析の手法における完備性の重要性から来る。関数解析において、バナッハ空間やヒルベルト空間が重要であることは言うまでもない。何かある関数空間の元を作りたいときに、近似的な方法を用いることがたいへんよくあり、そのような方法で求めるものが構成できることを保証するのが完備性だからである。作用素環に関数解析手法を適用するには、同様に何らかの完備性が必要であらう。もともとヒルベルト空間上の有界線形作用素全体がバナッハ空間をなすので、このバナッハ空間の中で作用素環が適当な位相で閉じていることを要請すればよい。ここで適当な位相の取り方には二種類あり、それによって作用素環は C^* 環とフォンノイマン環に分かれる。ノルム位相とはヒルベルト空間の単位球上の一様収束の定める位相であり、この位相で閉じている作用素環が C^* 環である。またヒルベルト空間上の各点収束が定める位相を作用素の強収束と言ひ、この位相で閉じている作用素環がフォンノイマン環である。(名前に反して、作用素の強収束の方がノルム位相より弱い位相を与えることに注意する。これはもっと弱い作用素の弱収束というものと対比した名前だからである。弱い位相で閉じているという方が強い条件だから、フォンノイマン環は自動的に C^* 環であることに注意する。しかし典型的なフォンノイマン環は典型的な C^* 環ではないので、 C^* 環論とフォンノイマン環論はわかれていたと思った方が研究者の実感に合っている。)

このように、作用素環を数のなす体の類似物と考える見方は有効で、たとえばガロア理論の類似を作用素環論で考えることはジョーンズの部分因子環論で大きな成功を収めた。

2. 環と空間

作用素環の最も重要な特徴は一般に積が非可換なことである。しかし可換な作用素環も考えて悪いわけではない。可換な C^* 環は(乗法単位元を持つことを仮定すれば)コンパクトハウスドルフ空間

上の複素数値連続関数環と同型である。このコンパクトハウスドルフ空間は抽象的な可換 C^* 環から取り出すことができ、この意味で可換 C^* 環を考えることとコンパクトハウスドルフ空間を考えることは同じ情報量を持っている。このため一般の可換とは限らない C^* 環も何らかのコンパクトハウスドルフ空間もどきを表していると考えることができる。これはただそう思っただけで、実際に空間があるわけではないが、この仮想的な空間のことを非可換(コンパクトハウスドルフ)空間と言ったりもする。また可換なフォンノイマン環は、ある測度空間上の L^∞ 関数環と同型である。今度もやはり、可換なフォンノイマン環を考えることと測度空間を考えることは同じと思ってよく、一般の非可換なフォンノイマン環は仮想的な非可換な測度空間に対応していると考えられる。このような考え方は昔からあるものだが、これを徹底的に推し進めたものがコンヌの非可換幾何学である。ここでは C^* 環やフォンノイマン環より広いクラスの作用素環を考え、そのうえでディラック作用素の抽象的な類似物考えたものが「非可換な多様体」と思えるということがポイントである。これは通常の幾何学の一般化を含み、応用もリーマン予想から素粒子物理学まで広がる広大な分野を築いている。

このように空間よりも環の方が実態であるという考え方は作用素環論以外でも有益であり、グロタンディークの代数幾何学での活躍もその一つの表れである。グロタンディークはもともと関数解析を専門にしていたのであり、作用素環論の論文も何本か書いている。 C^* 環上の自己共役連続汎関数を正負の部分に分けるという定理が作用素環論の教科書の最初の方に出てくるのであり、これは測度のジョルダン分解の類似なので、この定理も単にジョルダン分解と言ってしまうことが多いが、これはグロタンディークによるものである。可換 C^* 環がコンパクトハウスドルフ空間そのものを表しているという作用素環論の考え方がグロタンディークの代数幾何学に影響していると言えるであろう。

またリー群は「積演算の入った空間」である。そこでリー群上の関数環は通常の環に加えてホップ代数の構造が入る。これを抽象化したものが(作用素環的な)量子群である。ドリンフェルト・神保の方式の量子群の方が広く知られていると思うが、その枠組みではリー環の普遍包絡環をパラメータ q で変形したものを考える。これに対し、作用素環的な枠組みではリー群の上の連続関数環をパラメータ q で変形したものを考えるのである。多くの議論が両者に平行した形で展開できる。これも空間よりも環の方を重視した見方の一例である。

3. 作用素環論における分類理論

作用素環論におけるもっとも基本的な問題は分類理論、すなわちこの作用素環とあの作用素環が同型であるかどうかを決定する問題である。簡単な完全不変量があるとか、分類リストが列挙できるとかいったことがあれば分類理論は完成だが、そのようなことは到底期待できず、いくらでも変な例があると考えられている。離散群については「非自明な一般的ステートメントは必ず反例を持つ」という主張がグロモフの原理と呼ばれることがあるが、この意味するところはいくらでも奇妙な離散群があるということである。離散群があれば群環を経由して作用素環が作れるので、一般の作用素環は群環の一般化と思うこともできる。この立場からは、いくらでも奇妙な作用素環があることが期待されるのである。

これに対し、コンヌの1970年代の偉大な成果は、従順性と総称される、解析的によい条件を仮定すれば簡単な不変量が完全不変量になることを示したことである。この証明は大変難しいが、結果はきわめて簡明である。この結果と手法は、様々な形を変えて現在も盛んに研究されている。特に単純 C^* 環について同様の分類定理を得ることがエリオット・プログラムと呼ばれており、過去30年間以上にわたる大きな目標であったが、多くの人の努力により、現在この研究は最終段階に差し掛かっている。

一方、従順性を落とした範囲での分類理論もフォンノイマン環論で最近進展している。こちらは簡明な完全不変量を求めるといった方向は無理なので、だいたいは「違う作り方をしたフォンノイマン環は本当に違う」という種類の結果が多く得られている。特にボバ、小沢、ヴァースらの活躍が著しく、フォンノイマンの時代からほとんど発展がなかったようなテーマについても多くの素晴らしい結果が出ている。

4. 場の量子論と作用素環

さてここからは、上のような見方が有効である一例をもっと具体的に見ていこう。最初にも述べたように、「数を作用素で置き換える」という量子力学の考え方が有効であったので、この見方をさらに推し進められる枠組みとして場の量子論を考える。

場の量子論は物理学の理論として華々しい成功を収めているが、数学的立場から見るといろいろと基礎の部分が厳密ではない。そこで場の量子論の基礎を数学的に厳密な形で展開したいという考えが昔からある。その中で作用素環論を用いたものが代数的場の量子論と言われ、荒木・ハーグ・キャストラーらの基本的な仕事から50年以上の歴史がある。(英語では作用素環の環はアルジェブラ=代数というので、それを使っているという意味で「代数的」という。実際は関数解析的な理論である。) 場の量子論の数学的に厳密な公理系として、ワイトマン公理系というものが古くからある。古典的な場の概念を量子化したものとして、作用素値超関数を考え、その族の満たすべき条件を公理としたものである。これには時空とその対称性を表す群を指定して、その時空の上での作用素値超関数を考える必要があり、もっとも素直な設定では、4次元ミンコフスキー空間とポアンカレ群を考える。この公理系は割とシンプルなものであるが、数学的に研究しようとする、まず超関数を扱わなくてはいけないことが技術的に問題となる。また作用素値超関数とは、試験関数に対して作用

素を対応させる適当な写像のことであるが、ここで現れる作用素がしばしば非有界になることも技術的な困難をもたらす。そこで超関数も非有界作用素も出てこないようにしようというのが代数的場の量子論である。

観測可能量は自己共役作用素で表されるのであった。この自己共役作用素は非有界かもしれないが、そのスペクトル射影たちをまとめて考えれば、有界作用素で話がすむ。また観測可能量は時空領域ごとにたくさんある。そこで(有界な)時空領域ごとにそこでの観測可能量を考え、それらのスペクトル射影たちが生成するフォンノイマン環を考える。これによって、時空領域でパラメトライズされたフォンノイマン環の族が得られる。このような族について、物理的に自然と思われる公理を課したものをフォンノイマン環のネットと呼び、これが代数的場の量子論における数学的对象である。時空対称性を表す群は状態のなすヒルベルト空間に射影的ユニタリ表現を通してはたらき、これについてのある種の共変性が公理の一つである。また二つの時空領域が空間的に離れている場合は、光速でも両者の間には何の影響も及ぼせない。そこで両者の上での観測可能量は交換すると考えられ、これを公理化したものが局所性の公理である。

フォンノイマン環のネットについては1970年代、80年代にドブリッカー、ハーグ、ロバーツらの理論が進展し、数学的には大きな成功を取めたが、直接物理的な理論に役立つには至っていない。彼らは主に時空として4次元ミンコフスキー空間を考えていた。この場合は、ワイトマン公理系でも代数的場の量子論でも、公理を満たす例が物理的には自明な自由場の場合しか見つからないということが大きな問題である。

5. 頂点作用素代数とムーンシャイン

(代数的)場の量子論の時空と対称性の設定はいろいろなものがありうる。上で述べた4次元ミンコフスキー空間とポアンカレ群の代わりに、1次元円周とその(向きを保つ)微分同相写像群を取っ

たものがカイラル共形場理論である。共形場理論は2次元ミンコフスキー空間で考えるのが本来だが、時間座標と空間座標を混ぜて考えることにより、空間は二つの1次元空間の直積とみなすことができ、場の量子論もこの直積構造に応じた分解を考えることができる。さらにここに現れる1次元空間をコンパクト化し、無限遠点を動かす対称性も考えたものが、1次元円周とその微分同相写像群という設定である。この設定で考えると、ウェス・ズミノ・ウィッテン模型や量子群に関連して、大量の興味深い例を構成することができ、1990年代から多くの研究が進展している。代数的場の量子論が最も成功しているテーマである。この状況ではフォンノイマン環のネットは局所共形ネットと呼ばれる。

1次元円周とその微分同相写像群に対してもワイトマン公理系の対応物を考えることができる。この場合、作用素値超関数は1次元円周上で考えているため、フーリエ級数展開することができ、その係数となる作用素に基づいて代数的な公理系を書き下すことができる。ここで代数的と言っているのは、フーリエ級数の収束や、ヒルベルト空間の完備性を気にしないという意味である。この代数的な公理系を満たす対象は頂点作用素代数と呼ばれる。ここに現れる作用素値超関数が物理で頂点作用素と呼ばれていたことがこの名の由来である。

この頂点作用素代数は、抽象的には可算個の積演算を持つ無限次元ベクトル空間と思える。この公理系が現れたのは、ムーンシャイン予想に関連してであった。これは1970年代に認識された、散在型有限単純群、特にモンスター群と楕円モジュラー関数の間の不思議な関係に基づく予想である。この予想では、ある新しい無限次元代数系があって、その自己同型群がモンスター群になるであろうと考えられた。この新しい無限次元代数系として現れたものが頂点作用素代数である。ムーンシャイン予想に対応する具体例はムーンシャイン頂点作用素代数と呼ばれ、基本的な例である。頂点作用素代数は代数的積演算とそれらの満たす公理系があるという点では、群、環、体などの類似物と

考えることができるが、その公理系はもつとずっと複雑で、初めて見るとなんのことだか理解したいものである。

局所共形ネットと頂点作用素代数は、同じ物理的な対象物を別々に数学的に公理化したものなので、数学的なレベルでも直接に対応がつくと考えられる。実際、具体例、様々な構成法、表現論などのレベルでは両者がよく似ていることは明らかである。しかし直接的に数学的対応をつけるには技術的な困難が多くあり、片方で知られている結果がもう片方にはうまく翻訳できない、というケースも少なくない。これについては、最も基本的な対応の問題は、2015年に、カルピ、ロンゴ、ワイナーと私によって解決されたが、これを発展させる問題はまだ残っており、これからの重要な問題である。なお両者の手法を比べると、抽象的な表現論の扱いについては、作用素環的手法の方が扱いやすいが、さまざまな写像を具体的に書いて計算するには頂点作用素代数の方にメリットがあるようである。たとえばオービフォールドの有理性とと呼ばれる有名な問題があるが、古くから研究されている頂点作用素代数の枠組みではこの問題は未解決であるのに対し、局所共形ネットの枠組みでは対応する問題は既に肯定的に解決されている。なお局所共形ネットと頂点作用素代数の関係は、リー群とリー環の関係に似ていると言える。

上で述べた通り、頂点作用素代数はムーンシャイン予想に関連して「新しい代数系」として登場したものである。その公理系は大学初年級の数学しか知らない人にとってはかなり謎めいた複雑なものである。これに対し、局所共形ネットの公理は直感的にずっとわかりやすく、特に新しい代数系と強調する必要のないものである。ムーンシャイン頂点作用素代数に対応する局所共形ネットも構成されており、期待されるすべての良い性質を持っているので、ムーンシャイン予想の研究の発展の歴史を考えれば、先に局所共形ネットによる構成があってもおかしくなかったところである。しかし歴史はそのようには進まなかったのである。

2次元ミンコフスキー空間全体での共形場理論、

超対称性を持った共形場理論、2次元ミンコフスキー空間の半空間の上で考えた境界共形場理論なども、頂点作用素代数、局所共形ネットの両方の枠組みで研究されている。

6. テンソル圏と作用素環

上でのベタカラル共形場理論の研究において重要なものが、テンソル圏の理論である。これも新しい種類の代数系で、量子群の研究なども通じて、1990年ごろから次第にその重要性が認識されてきたものである。作用素環を用いないテンソル圏の研究も多くあるが、ここでは作用素環を用いた手法の有効性について解説したい。

圏論には多くの高度な理論があるが、ここで取り上げるテンソル圏の理論はそれに比べてはるかに初等的なものである。具体的な例を挙げるため、有限群 G を一つ取ろう。そして G の有限次元ユニタリ表現全体を考える。二つの表現については、直和表現、テンソル積表現を取ることができる。テンソル積については自明表現が乗法単位元の役割を果たす。また既約表現という概念があり、一般の表現は既約分解することができる。今、群は有限なので、既約表現はユニタリ同値類の意味で有限個しかない。さらに二つの表現に対し、その間のインタートワイナーのなすベクトル空間がある。そして表現に対しては反傾表現というのがあり、群の元の逆元に似た性質を持っている。これらの性質を抽象化したものがテンソル圏の一種であるフュージョン圏と呼ばれるものである。ユニタリ表現にあたるものを対象、インタートワイナーにあたるものを射とするので圏になる。テンソル積の一般化にあたる操作があるときにテンソル圏と言うのだが、その操作がさらに都合の良い条件を満たしているときに数理論理学でフュージョン則と呼ぶことからこの名前がある。有限群のユニタリ表現には次元という概念がある。フュージョン圏でも各対象に次元にあたる量があるが、もはや自然数ではなくなる。作用素環に関連して現れるフュージョン圏の場合は次元にあたるものは1以

上の実数になる。

有限群のユニタリ表現の場合は $\pi \otimes \sigma$ と $\sigma \otimes \pi$ は明らかにユニタリ同値である。一般のフュージョン圏ではこの類似は成り立たないが、あるよい状況下では順序を入れ替えたテンソル積が一斉にうまくい具合に同値になることがある。このとき、 a と b を入れ替えてさらに続けて b と a を入れ替えるという操作を行った時に自明な結果を生じるということは要求しない。このとき、テンソル積の成分の入れ替えが組み紐の紐の上下の入れ替えと類似の性質を持つようなものを考え、それを組み紐構造という。組み紐構造が十分に非自明な時、非退化であると言い、フュージョン圏が非退化な組み紐構造を持つとき、モジュラーテンソル圏と呼ぶ。有限群の有限次元ユニタリ表現のなすフュージョン圏は組み紐構造を持つが、それは退化しているのでモジュラーテンソル圏ではない。有限群の有限次元ユニタリ表現のなすフュージョン圏にドリinfeld・ダブルと呼ばれる構成を施すと、モジュラーテンソル圏が得られることが知られている。

モジュラーテンソル圏は量子群 (の 1 のべき根における表現論) においてよく研究されている。作用素環論におけるジョーンズの部分因子環論においても、自然にフュージョン圏が現れること、ドリinfeld・ダブルにあたる構成があつてフュージョン圏からモジュラーテンソル圏が作れることが 1990 年ごろ、主にオクニアーヌによって認識された。

カイラル共形場理論において、適当な有限性条件のもとである種の表現論を考えることによってモジュラーテンソル圏が生じるということは物理学の文献で早くから主張されていた。ロンゴ、ミューガーと私は、この主張を局所共形ネットについて研究し、ある種の有限性条件があれば確かにモジュラーテンソル圏が表現論を通じて現れることを数学的に初めて証明した。(局所共形ネットでは作用素環たちは共通のヒルベルト空間に最初から作用しているのだが、ほかのヒルベルト空間への作用を考えるのが表現論である。) その後頂点作用素

代数の表現論においても同様の結果が証明された。

ユニタリ性という自然な条件を課せば、任意のフュージョン圏はジョーンズの部分因子環論の枠組みで実現できることが比較的容易に分かる。ユニタリ性を持つフュージョン圏は、有限群の有限次元ユニタリ表現のなす圏を一般化したものであり、強い有限性を持っている。しかし無限次元の作用素環を通じてその研究が自然にできるようになるのである。このことの類似として、ユニタリ性を持つモジュラーテンソル圏がある局所共形ネットの表現論として常に実現できるか、という問題が最近注目を集めている。私はこの答えはイエスであると強く信じているが、現在のところ証明のめどは立っていない。さらに、作用素環を用いると、他の量子群や頂点作用素代数の枠組みではこれまで作れていない不思議なフュージョン圏やモジュラーテンソル圏がたくさん作れることが知られている。特に有名なものはハーゲラップの構成したハーゲラップ部分因子環から生じるテンソル圏である。このような例が大量に作れることも作用素環を用いたアプローチの長所である。なおカイラル共形場理論については、有限性を持つ例はすべて、ウェス・ズミノ・ウィッテン模型に既知の操作を施すことによって得られるであろう、という予想というか期待があるようだが、私はそのようなことは正しくないと考えている。

モジュラーテンソル圏からは 3 次元位相的場の量子論、特に閉 3 次元多様体の位相不変量が作れることがレシェティヒン・トゥラエフによって示されている。量子群から生じるモジュラーテンソル圏の場合はこの位相的場の量子論はよく研究されているが、作用素環から生じるモジュラーテンソル圏の場合は研究があまり進んでいない。もともと 3 次元位相的場の量子論は、結び目のジョーンズ多項式から始まったものであり、それは作用素環から発生したものなのだから、さらに新しい位相不変量が作用素環から生じることも十分に期待される場所である。

(かわひがし・やすゆき, 東京大学大学院数理学研究科)