数学における場の量子論の研究

河 東　泰 之

今月号を見ても明らかなとおり，場の量子論は大変広い範囲をカバーする大理論である．数学の様々なテーマとも関係しており，場の量子論と無関係な現代数学の分野を挙げることは難しいほどである．中でも，Witten に代表される幾何学との交流は大変著しいものであるが，ここでは Feynman の経路積分等に頼らない，数学的に厳密な，場の量子論へのアプローチを取り上げたい．

厳密な公理から出発して場の量子論を数学的に研究する流儀を，公理的場の量子論と呼ぶ．また，数学的要請を満たす例を具体的に構成してそれを研究するという方針を，構成的場の量子論と呼ぶ．いずれも 20 世紀半ばに多くの注目を集めたが，最近大きな進展はないと言ってよいであろう．4 次元 Minkowski 空間で考えるのが自然と思われるが，そこでは長年の努力にもかかわらず，自由場と呼ばれる物理的に自明なものしか，公理を満たす例が作れていない．それではまったくしょうがないようであるが，別の設定では，数学的に厳密で，具体例も豊富であり，様々な数学の分野と深い関係のある理論が近年発展している．それが共形場理論である．これだけでも非常に幅の広い理論だが，ここでは筆者の関係する側面の現在進行中の発展について説明してみたい．

数学的に厳密な場の量子論の設定の一つに Wightman 公理系と呼ばれるものがある．この枠組みでは，量子場とは時空上の作用素値超関数である種の条件を満たすもののことである．量子場の族が場の量子論を記述していると考える．場の量子論を記述するための数学的データは，時空，時空対称性を表す群，量子場の族である．時空とその対称性の自然な設定は，4 次元 Minkowski 空間と，Poincaré 群であろうが，そう取ってしまうと，上に書いたように自明な例しか見つかっていない．それとは別に，各点でスケールがあってもよいが角度を保つような変換，共形変換を対称性に取ると面白いことがある．これはどの次元の時空でも考えることができるが，特に興味深いのは 2 次元 Minkowski 空間の場合である．この時空は「半分ずつ」の次元に分けることができ，1 次元円周が時空の役割を果たす．この円周で，向きを保つ微分同相写像全体を考えるのが共形場理論での時空対称性の群である．

この 1 次元円周上での量子場を考えよう．1 次元円周上の作用素値超函数は作用素係数の Fourier 級数に展開できる．これに基づいて共形場理論の公理化を行ったものが頂点作用素代数である．頂点作用素とは 1 次元円周上のある種の作用素値超函数のことで，それらのなす代数系という意味である．これはムーンシャイン予想の研究の中で，1980 年代に導入され，数学的に研究されてきている．ムーンシャイン予想とは，位数最大の散在型有限単純群モンスターと j 不変量と呼ばれる古典的な楕円モジュラー関数の不思議な関係に関するもので，1970 年代に提出された．そこでは，ある新しい無限次元の代数系が存在して，その自己同

型群がモンスターになるであろうと予想されており，その新しい代数系を正確に実現したものが頂点作用素代数だったのである．現在までに様々な頂点作用素代数の例が構成され，研究されている．

一方，私の専門である作用素環論では別の方法に基づいて場の量子論の数学的研究が行われてきた．作用素とは，物理学では演算子と呼ばれているもので，量子力学での観測可能量は自己共役な作用素で表される．作用素は数を一般化したものと思えるので，自由に足したりかけたりできる都合がよい．このようなことから,『量子力学の数学的基礎』を著した von Neumann が始めたのが作用素環の理論である．作用素環とは作用素のなす代数系で，適当な位相で閉じているもののことである．量子場を作用素値超関数と思った場合は，代数的取り扱いが難しい．そこで時空領域ごとに，そこでの観測可能量たちが生成する作用素環を考え，そのような作用素環の族を研究しよう，というアイディアが生まれた．これが代数的場の量子論と呼ばれるもので，1960 年代に成立した．この理論は Doplicher, Haag, Roberts らによって，表現論や双対性の理論が発展させられ，大きな進展を見たが，4 次元 Minkowski 空間で Poincaré 群のなす時空対称性を考えると自明な例しか作れないということには変わりがなかった．共形場理論を，この代数的場の量子論の枠組みで扱う場合は，1 次元円周を時空と思い，そこでの領域 (円弧) ごとに，観測可能量の生成する作用素環を考えて，その作用素環の族が共形場理論を記述していると考えることになる．このような考え方は 1980 年代に始められた．一方，1980 年代の作用素環では Jones の創始した subfactor 理論が大きく進展していた．

体と拡大体については古典的な Galois 理論がある．この類似を作用素環と拡大作用素環について考えるものが Jones の理論である．基本的な作用素環が factor と呼ばれるものであり，factor の拡大より部分環を考える方が形がきれいなため，subfactor 理論という．これは結び目の不変量である Jones 多項式の発見を導き，同時期に発展した量子群の理論とも互いに影響を与えながら爆発的に発展したものである．代数的場の量子論における表現論が，subfactor 理論と深く関係していることが 1980 年代末に明らかにされた．

共形場理論を代数的場の量子論の枠組みで考えたときに現れる作用素環の族を，局所共形ネットと呼ぶ．局所という名前は Einstein 因果律を作用素の可換性で表した局所性の公理から来ており，ネットという名前は点列の一般化のネットから来ている．数学の理論としては，局所共形ネットの公理からの帰結を調べたり，公理系を満たす例を構成したりすることが問題になり，これまでに多くの研究がなされてきた．Jones の subfactor 理論はそこでの強力な道具となる．

頂点作用素代数と局所共形ネットは，同じ物理理論を別々の方法で公理化したものなので，本質的に同じものと考えられる．実際に，例の作り方，これまでに調べられた様々な性質を見ると，非常に高い類似性がある．しかし，頂点作用素代数の理論は位相や収束を無視した純代数的な理論であるのに対し，局所共形ネットの理論は，収束や位相の話をフルに使った関数解析的な理論であり，両者の間の直接的な対応をつけることは容易ではなかった．2015 年になって，Carpi，Longo, Weiner と私は，初めて一般的な状況の下で，頂点作用素代数から局所共形ネットを作れること，作られた局所共形ネットから元の頂点作用素代数が復元できることを証明した．この構成にはある条件が付いているが，それは大変多くの具体例で直接チェックできる種類のものである．これによって二つの研究の流れを統合することに大きな進展がもたらされた．

しかしこれは二つの理論のうちの片方が無駄だという話ではない．二つの理論にはそれぞれの長所があり，問題によってどちらの方が強力であるかは異なっている．両者の関係についてはこれから解明すべき問題も多く残されており，これからも多くの発展が期待されるところである．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）