

無限次元

河東 泰之

1. はじめに

初対面の人に職業は数学者だと言うと、何を研究しているのかと聞かれることがある。答えは、相手がどのくらい数学になじみがあるかによるのだが、理科系の人相手の場合は、無限次元行列の理論だと答えることがよくある。理科系で行列を知っている人でも、こう言うと何かとてつもないことのように反応する人は少なくない。「4次元でも何か常識を超えた話なのに、無限次元なんて」というわけである。しかし数学的には無限次元を考えること自体は何らたいしたことはなく、必然的なものである。

n 次元ベクトル空間の一番簡単な例は、数を n 個並べたベクトルたちを考えただけのものである。そう思うと、 $n = 3$ でも $n = 1,000,000$ でも理論的にはたいした違いはない。さまざまな実験、観測データを並べてベクトルだと思えば統計的取り扱いに便利だということはよくあり、そう思えばデータの数が2個や3個しかないことの方がむしろまれである。データは通常有限個であるが、無限個の数を並べて考えることにするのも、とりあえずはそれほど大きな発想の飛躍ではない。

数学的な立場からみたとき、無限次元のベクトル空間が出てくる自然な状況は関数を考えるときである。 n 個の点からなる集合の上の任意の関数を考えよう。このような関数は、 n 個の値を並べて考えれば、 n 次元のベクトルを考えているのと

同じことであり、関数の足し算、定数倍は、ベクトルの足し算、定数倍に対応している。普通関数を考えるときは、有限集合ではなく、実数全体や区間のような無限集合を考えるので、その上の関数たちは、無限個の数が並んだもの、すなわち無限次元ベクトルにあたるというわけである。(関数を考えるときは普通、連続性とか、積分についてよい性質を持つとかいった条件を考えるのだがそれは今はたいした問題ではない。) 関数というものはかなり昔から考えられてきたが、このように「関数 = 無限次元ベクトル」という考え方が出てきたのは比較的新しく、20世紀前半のことである。微分方程式(あるいはそれを書き換えた積分方程式)を考える際に、一つ一つの関数ではなく、関数全体の集合を考えることの有効性が、その頃初めて明らかになってきたからである。高校で最初に習うときは、ベクトルと関数は全く別のもののようにだが、両者には共通の性質がたくさんあるのである。このようにして、線形代数の無限次元版の理論が登場した。関数解析学と呼ばれ、現在でも様々な方向に発展している。

無限次元の研究が盛んになったもう一つの理由は、物理学、特に量子力学の研究である。量子力学が20世紀前半に成立し、その数学的理解が当初から大きな問題になった。そこで、物理的な「状態」を数学的に考えるには、無限次元のヒルベルト空間を考える必要があることがわかったのである。フォン・ノイマンらの活躍により、このことも

関数解析学の初期の発展に大きな役割を果たしている．近年数学と理論物理学の関係がまた深まっており，これまであまり物理学との関係が深いとは思われていなかった代数的な分野も最近の進展では大きな注目を集めている．ここでも無限次元はあらゆるところに現れる基本的なキーワードになっており，本特集でも数理物理学に関係した話題は多く取り上げられている．

通常，線形代数を最初に習うときは，微分積分学などの極限操作はあまり出てこない．ベクトルや行列を成分とする無限級数が後の方で出てくることもあるくらいである．有限次元ベクトル空間に入る自然な位相は一種類だし，有限次元ベクトル空間の間の線形写像はこの位相について自動的に連続になるし，極限と言ってもあまりたいしたことは起こらないからである．これに対し，関数解析学では，極限操作が基本的な重要性を持ち，しかもさまざまな困難が発生する．たとえば自然な位相が何通りもあったり，線形写像の連続性や，それを弱めた条件などのチェックがずっと難しくなったりするのである．関数解析学の難しい点も，重要な点もすべてこの種の極限操作に関係していると言ってもよいくらいである．

それでは無限次元は有限次元の違いはどこから発生するのであろうか．単に，何もかも違う，と言っても言い過ぎではないかもしれないが，もっと具体的に限定してみよう．私の研究している作用素環論は，直接無限次元のベクトル空間の上の線形写像たちを取り扱う．そこに出てくるさまざまな議論，性質を見ると大きな違いは主に次の二つから発生していることがわかる．

一つ目は，無限集合はその真部分集合と同じサイズだ，ということである．これを無限の定義とすることもよくある重要な性質である．たとえば，1番を2番に動かし，2番を3番に動かし，3番を4番に... という操作を繰り返したとき，無限個番号があれば，ずらした先では1番だけが余ってしまう．あるいは，1番を2番に動かし，2番を4番に動かし，3番を6番に... としていけば，無限個余らせることも可能である．このことに関連

して，どんどん番号をずらしていくと，いくらでも「遠く」に持って行けるということもある．これらの性質が，無限次元ベクトル空間の線形写像の興味深い性質を導き，多くの重要で新しい側面をもたらすのである．

もう一つの重要なポイントは，無限個の数は普通は足せないということである．もちろん和が収束する級数もいくらでもあるが，勝手な数列を取ったとき，その和というものは一般には定義できない．自然な理論を有限次元の時と同様に考えようとすると，何らかの意味で和がとれるようなものに話を限定する必要があるが，通常関数解析学ではそうすることが多い．これは，話を特殊なものに限定しているようだが，この限定のためにかえて，無限次元でのみ興味深い現象が起こったりするのである．

さてこのように，基本的な重要性を持つ無限次元だが，無限次元ベクトル空間そのものを研究している人はあまり多くない．基本的なことはよくわかっているし，一方ではいくらでも複雑でよくわからないことがたくさんあって，何を研究したらいいのかわからないからでもある．有限次元の話でも，有限次元ベクトル空間自体を研究している人はあまりいないが，有限次元の曲がった空間，すなわち多様体については，興味深い問題の数も研究している人の数も莫大である．またたとえば，群の表現についても有限次元でもさまざまな重要なテーマがある．そこで無限次元でも，単にベクトル空間を考えるのではなく，有限次元で考えられていたさまざまな数学的構造を無限次元で考えると，いろいろと重要な研究テーマが生じてくる．このような立場から，本特集では多くの話題が取り上げられている．さまざまな立場の方に興味を持っていただければ幸いである．

(かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科)