線形代数と関数解析学 — 無限次元の考え方

河東　泰之

1. はじめに

線形代数は線形空間とその上の線形作用素を取り扱う．ごく基礎的な部分は線形空間が有限次元でも無限次元でも違いはないが，線形代数の中心的な話題，すなわち対角化，ジョルダン標準形，ランクの話などは，線形空間が有限次元でないと話がうまく進まない．そもそも行列を具体的に書く話が線形代数の中心であり，無限サイズの行列は最初から話に入っていない．この意味で通常の線形代数は有限次元の理論であると言ってもさしつかえない．これを無限次元で考察するのが関数解析学である．しかし，単に無限次元の線形空間やその上の線形作用素を考えたのでは，手がかりが少なすぎて，意味のある一般論はほとんど何も展開できない．そこで新たな手法が必要になる．それが収束の概念である．これを導入し，位相的な考察を加えた無限次元の線形代数が関数解析学である．

そもそもなぜ「関数」解析というのだろうか．それはさまざまな関数のなす無限次元空間が基本的な対象だからである．関数解析学成立の重要な動機を与えたのは，微分 (あるいは積分) 方程式と量子力学である．これら二つについては本号の特集でそれぞれ別に記事があるのでここでは詳しいことは書かないが，前者については関数が出てくるのは当然であり，後者についてもさまざまな関数が物理的状態を表すものとして現れることに注意しておこう．

以下，線形代数が無限次元でどのような形を取るのか見ていくことにする．

2. ヒルベルト空間とバナッハ空間

まず線形作用素の前に線形空間がなければ話が始まらない．通常の線形代数では，基底の話は重要であるが，それ以外にはあまり中身のある話はない．たとえば線形空間の公理自体にたいして中身があるわけではない．

通常の微分積分学では，数列の収束が基本的な概念である．n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ でも同様に点列の収束を考えることができるが，線形代数では，これらの収束概念はそれほど重要な役割を果たさない．しかし無限次元の線形空間では収束概念なしで有意義な議論を展開するのはなかなか難しいので，位相を備えた線形空間，すなわち位相線形空間が重要になる．(ベクトルの足し算やスカラー倍などの基本演算が連続になっていることを要請する．) 位相はどのように定められてもいいのだが,「ベクトルの長さ」にあたるノルムという概念が定まっているものが，重要であり，また取り扱いやすい．(ノルムとは，基準，標準などの意味を持つ単語である．) ベクトル x に対し，そのノルムを $\|x\|$ と表し，これは 0 以上の実数値を取る．ノルムが 0 になるのはベクトルが 0 ベクトルのときだけである．ノルムの公理には三角

不等式 $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ などがある．このような公理を満たすノルムが抽象的に存在すれば，2 つのベクトル x, y の間の距離を $\|x-y\|$ で定めることにより位相が定まる．典型的な例は，L^p-空間 $\|f\| = (\int |f(x)|^p \ dx)^{1/p}$ である．(ここで $1 \leq p < \infty$ とする．右辺が有限になるような f だけを考えるのである．) この線形空間の元は正確に言えば，ほとんどいたるところ一致する関数を同一視しているので，関数の同値類なのだが，どの点でどの値を取る，という関数として最も基本的な情報はとりあえず忘れて，一つのベクトルと思ってしまうわけである．

さらに重要なのは $p=2$ の場合であり，このときは f と g の内積 $(f,g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$ も定めることができる．この内積は高校で習う通常の内積の性質をみな持っている．そのような通常の内積の条件を公理化して得られるものが内積空間である．たとえば，コーシー・シュヴァルツの不等式は，これらの公理から従う．また二つのベクトルの内積が 0 であるとき，これらのベクトルは直交していると言う．素朴に考えると二つの関数が直交しているとか，抽象ベクトル空間の二つのベクトルが直交しているとはどういう意味か想像しがたい点もあるが，この定義は，古典的な直交の概念の性質をよく保っている．

なお通常の線形代数では，最初からベクトルを数ベクトルとして具体的に書いてしまうと，内積はもともと自然に定まっているような気がしてしまうが，内積は線形空間の公理からは独立したものであることを強調しておく．微分方程式の解が自然に有限次元の線形空間になることはよくあるが，必ずしもそこに自然な内積が定まっているわけではない．

さてこのように位相が定まってもそれだけでは不十分である．微分方程式の解などを作る際に，一気に作ることはうまく行かず，近似的にだんだんと精度を上げながら作っていくという方法がよくある．この際に，精度を上げ切った極限を考える必要があるが，抽象的な位相線形空間の設定でそのような極限が存在するかどうかは明らかではなく，そもそも一般的な設定では極限は存在しないこともある．そこでそのような極限の存在を保証する公理を入れておかないといけない．これが完備性の公理，すなわちコーシー列は収束する，というものである．大雑把に言えば，相互に限りなく近づいていくような点列には収束先がある，ということである．ノルムがあって，完備性が満たされているものをバナッハ空間と呼び，さらにそのノルムが内積から定まっているものをヒルベルト空間と言う．通常の線形代数はかなりの部分が有限次元バナッハ空間の理論であるが，自己共役行列，正規行列などの話は有限次元ヒルベルト空間論の一部である．線形代数の範囲では両者が混在していてもあまり問題にならないが，無限次元空間ではその区別をはっきりさせることが重要である．

線形空間としての基底，すなわち任意のベクトルを有限個の基底ベクトルの線形結合で表せるものはいつでも存在するが，無限次元線形空間でそのようなものを考えてもほとんど役に立たない．かわりに有用なのは，任意のベクトルを無限個のベクトルの線形結合で表すことである．ヒルベルト空間では，これを実現する正規直交基底を取ることがいつでもでき，有限次元空間とよく似た話が無限次元でも展開できる．フーリエ級数はその具体例として大変重要なものである．これに対し，一般のバナッハ空間の設定では基底の一般論はやっかいであり，あまりはっきりした結果は得られない．

ノルムがうまく定められないが自然に位相の入る線形空間もあり，さまざまなクラスが研究されているが簡単のためここでは省略する．

3. 有界線形作用素とコンパクト作用素

さて線形代数の中心的な話題は，線形作用素，あるいはその具体的な表示である行列である．無限次元でも同様であり，バナッハ空間あるいはヒルベルト空間の上の線形作用素を考えることになる．位相を考えたのであるから当然，もっとも自然なことは連続な線形作用素を考えることである．この連

続性は，線形作用素 T に対し，$\sup_{x\neq 0}\|Tx\|/\|x\|$ が有界であることと同値なので，通常有界性と呼ばれる．すなわち有界線形作用素が最も基本的な考察対象である．これが通常関数解析学で最初の方に習うものであり，常識的に成り立つと期待される基本的な性質が実際に成り立っている．その次に習うのは，連続性より一見弱いような性質から自動的に連続性が成り立つと言う種類の結果(とその仲間)であり，これらは「常識的に成り立つと期待される」ということはまったくない．これらはベールのカテゴリー定理から導かれるものであり，抽象的アプローチのパワーを示すものである．

さて上のように，有界線形作用素が，有限次元の行列に対応する無限次元の基本的な対象であるが，有限次元では成り立つのに無限次元では成り立たない性質がいろいろある．たとえば固有値や固有ベクトルの性質が典型的な例であり，これの無限次元版については下のセクションでふれる．これらの現象のあるものは，無限次元空間では有界開集合がコンパクトとは限らない，ということに原因がある．通常の微分積分学では，あまりはっきり意識しないかもしれないが，有界点列から収束部分列が抜き出せるという性質が非常に重要な役割を果たしているのに，これは無限次元の線形空間では全く成り立たなくなってしまうのである．そこで有限次元に近いようなよい性質を成り立たせるには，線形空間の性質に期待するのはやめて，線形作用素の方によりよい，より強い性質を仮定しなくてはならない．そのようにして考えられたのが，コンパクト作用素である．正確な定義は書かないが，だいたい,「像が有限次元に近い」というタイプの条件である．このとき通常の連続性より強い種類の連続性が成り立つので，完全連続作用素という名前もある．これは多様体上の微分作用素にも関連して重要な役割を果たす作用素である．

4. 非有界作用素

さて上のセクションで述べたように，連続な，あるいはさらに強くコンパクトな線形作用素を考えることが自然なのであるが，それだけでは話はすまない．微分方程式や量子力学においてもっとも基本的な線形作用素が連続ではないからである．たとえば，$L^2(\mathbf{R})$ における微分作用素や，$f(x)$ に，$xf(x)$ を対応させる掛け算作用素などである．(この二つは本質的には同じ作用素である．) そこで有界でない作用素も考える必要が出てくるが，せっかく導入した有界性を完全に落としてしまったのでは意味がない．有界性を適度に弱めた条件を考えなくてはいけないのでる．それが，閉作用素というクラスであり，線形作用素 T のグラフ，すなわち $\{(x,Tx)\}$ が閉部分空間であるという条件である．ここで注意すべきなのは，T の定義域が元の空間全体とは限らないことである．上の例でも，$L^2(\mathbf{R})$ の一般の関数は微分可能ではないし，また $L^2(\mathbf{R})$ の一般の関数に x をかけたら $L^2(\mathbf{R})$ に入るとは限らない．しかしどちらの場合も，作用素の定義域は $L^2(\mathbf{R})$ 全体で稠密なので十分にたくさんあるとは言える．そこで，稠密な部分空間を定義域とし，グラフが閉部分空間となるような線形作用素を考えることが重要になるのである．

この閉作用素たちについては，連続性が成り立たないため，通常期待されるよい性質を持つとは言えず，さまざまな技術的な困難が発生する．しかし一方，グラフが閉部分空間と言うのはかなりたちのよい性質であり，それなりによい性質もいろいろと成り立つ．閉作用素の基本的な性質を学ぶことは関数解析学の初歩段階で重要なことである．

5. 固有値とスペクトル

線形代数において応用上も理論上も，もっとも重要な概念は固有値と固有ベクトルであろう．ジョルダン標準形や対角化の話もこれに付随した話題である．そこでこれを無限次元で考えることが重要である．線形作用素 T について，$Tx=\alpha x$ となる，0 でないベクトル x とスカラー α が存在する，という条件は無限次元でもまったく同様に考えることができるが，そのような α は無限次元では一般に存在しなくなってしまう．そこで見方

を少し変えて，$T-\alpha$ が可逆でないような α たちを考えることにしてみる．ただしここで，T はあるバナッハ空間から自分自身への有界線形作用素であり，α はこのバナッハ空間の上の α 倍するという作用素である．また,「可逆」というのはこのバナッハ空間の上の有界線形作用素で逆作用素になっているものが存在すること，とする．(T として閉作用素を考えることも重要であるが，今は簡単のため，有界線形作用素に話を限る．) T が行列のときは，α がこの条件を満たすことと，α が固有値であることは同値であるが，無限次元では一般に，前者の方が弱い条件である．このような α 全体は複素平面内の空でないコンパクト集合になることが示せて，この集合を T のスペクトルという．行列の固有値は有限集合をなすので，当然コンパクト集合になるが，無限次元では一般に有限ではないコンパクト集合が現れる．

コンパクト作用素については，上で述べたように,「行列に近い作用素」なので，スペクトルについても有限次元に近い性質が成り立つ．たとえば，スペクトルの点は原点以外は必ず固有値になることがわかる．

このようにスペクトルが固有値の役割を果たすのだか，何度も言うとおり，対角化やジョルダン標準形の理論が線形代数の基本であるので，その無限次元版を考えたい．しかしそのためには，一般のバナッハ空間ではうまくいかず，線形空間をヒルベルト空間に限る必要がある．さらに，有界線形作用素の方も一般のものではなく，自己共役あるいは正規に限る必要がある．(自己共役作用素や正規作用素の定義は書かないが，いずれも，自己共役行列や正規行列の無限次元への自然な拡張である．) たとえば，$L^2([0,1])$ 上で $f(x)$ に $xf(x)$ を対応させる作用素 T を考えよう．ヒルベルト空間を $L^2(\mathbf{R})$ のかわりに $L^2([0,1])$ にしたので定義域はヒルベルト空間全体であり，これは有界線形作用素になっていることがわかる．この作用素のスペクトルは閉区間 $[0,1]$ である．α がこの区間に入っていないときは $T-\alpha$ の逆作用素は $1/(x-\alpha)$ を掛けるという作用素である．α がこの作用素の固有値であるとすると，$(x-\alpha)f(x)=0$ となる関数 $f(x)$ が定数関数 0 以外になくてはならないが，それは不可能である．(f が α に台を持つデルタ関数ならよいがこれは L^2-関数ではない．) 一方 $\alpha\in[0,1]$ のとき，台が α を含む小さい区間に含まれているような L^2-関数 f については，Tf と αf は「ほとんど近い」．この意味でスペクトルの元 α は固有値ではないが，ほとんど固有値ではある．この種のことが自己共役作用素のスペクトルについてうまく成り立っているということがスペクトル分解と呼ばれることであり，自己共役行列のユニタリ対角化の無限次元版である．

ジョルダン標準形に関連して不変部分空間の存在問題も説明しておこう．バナッハ空間 X の上の有界線形作用素 T について，0 でも X 全体でもない閉部分空間 Y があって，$TY\subset Y$ となるものがあれば，T の性質の研究の一部は部分空間 Y の上への T の制限の研究に帰着できる．この意味で T の研究がより簡単なものの研究に帰着できる (可能性がある) ので，このような部分空間 (不変部分空間と呼ばれる) があるかどうかは重要な問題である．一般のバナッハ空間の上の有界線形作用素ではそのような不変部分空間は存在しないことがあることがわかっているが，ヒルベルト空間の場合，いつでも存在するかどうかは古くから有名な未解決問題である．ヒルベルト空間の場合に限定したこの問題ですら解けないのであるから，ジョルダン標準形の理論の無限次元版はまったくできていないし，何らかの適切な無限次元版があるのかどうかさえ疑わしい．

6. 作用素たちのなす代数系

$n\times n$-行列の全体は和や積で閉じているので環をなしている．これの無限次元版が作用素環である．行列環の環としての性質とは，両側イデアルが自明なものしかない (すなわち単純環である) とか，共役転置演算を保つ環の自己同型はユニタリ行列 U を使って $A\mapsto UAU^*$ とするものしかない，といったことである．通常の線形代数ではこ

のような環としての構造はあまり考えないが，私の専門が作用素環論であるので，これについても最後に少しふれておこう．

たとえばあるバナッハ空間の有界線形作用素全体は環をなし，それ自身がバナッハ空間である．これはバナッハ環と呼ばれるものの例であり，スペクトルの一般論はバナッハ環の枠組みで展開できる．このようなバナッハ空間の上の作用素からなるものではない，より抽象的なバナッハ環も考えることができ，そこでもスペクトルの理論を展開することができる．しかしこのような一般的な設定で展開できる理論には限界があり，あまり精密なことは理解できない．もっと限定的な状況で詳しく調べる方が興味深い理論を展開することができ，それにはバナッハ空間ではなくヒルベルト空間の上で考える必要がある．そこでヒルベルト空間の上の有界線形作用素のなす環を考えるのだが，さらにヒルベルト空間の利点をフルに生かすには，共役転置演算 (の無限次元版) で閉じているを考えるのがよい．有限次元の場合は，たとえば $n \times n$ の上三角行列全体を考えるとこれは環をなしているが，共役転置演算では閉じていない．無限次元では今このようなものは考えないということである．(このようなものの無限次元版を考える理論もあるが，あまり詳しいことはよくわかっていない．) だいたいこのようなものを考えるのが作用素環論であり，さらに環自身がバナッハ空間になっているものが C^*-環，さらに位相的に限定をつけたものがフォン・ノイマン環である．

行列 A, B に対し，一般に AB と BA が同じでないというのは真っ先に習う基本中の基本である．もちろんこれは無限次元でも同様であり，量子力学の基本を支える重要事項でもある．よって作用素環は通常非可換環なのだが，たまたま可換環になることももちろんある．このような可換な C^*-環は，コンパクト・ハウスドルフ空間 X の上の連続関数環 $C(X)$ に同型であることが昔からわかっている．またフォン・ノイマン環が可換な場合はさらに，ある測度空間の上の L^∞-関数のなす環に同型であることもわかっている．一般の作用素環は非可換環であるから，もはやコンパクト・ハウスドルフ空間や測度空間は存在しないのだが，気持ちとしては何か「非可換な空間」の上の関数を考えているように思うのである．(「空間の上の関数たち」の非可換な類似を考えているのだから,「非可換」という形容を「空間」の前につけるのはおかしいと言えばおかしいが，気分を表しているものなのでしかたがない．) この意味で作用素環論が非可換な位相空間論や測度空間であるということは昔から言われていたことである．しかし，単なる位相空間や測度空間は，幾何学の対象としては構造が乏しい．もっと豊かな構造であるたとえばリーマン多様体の非可換版を考えようというのがコンヌの非可換幾何学である．その誕生から二十数年がたち，数学全体と理論物理学の広い範囲へのさまざまな応用が得られてきている．

すでにある幾何学を「非可換化する」という方針もよいが，真に興味深いのは非可換な状況でのみ起こる現象である．冨田-竹崎理論におけるモジュラー自己同型群の存在がその一つの例であり，スローガン的に言えば，非可換測度空間は，時間発展を自動的に生じる，ということである．(可換なフォン・ノイマン環でモジュラー自己同型群を考えても自明な恒等自己同型しか生まれないので，自明でないモジュラー自己同型群は真に非可換な状況でのみ起こる現象である．) また，コンヌによる外部共役によるフォン・ノイマン環の自己同型の分類理論や，エリオットによる従順単純 C^*-環の K-理論による分類プログラムも，可換版は無意味であったりまったく成り立たなかったりすると言う意味でやはり，真に非可換な現象である．確率論やガロア理論もこのような意味で非可換化することができ，超弦理論からリーマン予想に関連する整数論まで，幅広い話題と関連して近年急速に発展している分野である．高度に技術的な話題が多いが，線形代数の無限次元版だ，という意識は常に重要かつ有用なアイディアを提供し続けている．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）