特集／代数的物理観

物理を語るための代数という言葉

河東　泰之

1. はじめに

本特集のテーマは「代数的物理観」だが，私の専門は代数学でも物理学でもない．それにもかかわらず私がこれを書いているのは，数理物理学に現れる構造を研究するのに代数的手法が有効であること，およびそのような代数的構造を調べることが数学的にも興味深いということを説明したいからである．

物理学に使われる数学と言ったとき，真っ先に思いつくのは微分方程式であろう．そもそもニュートンによる微分積分学の創始の頃から，微分方程式が物理学にもっとも近い数学であったことは間違いない．力学に続き，電磁気学でもそうであり，工学的応用まで含めた物理学と微分方程式の関係の深さは現代においても明らかである．これらの古典的物理学の成立のあと，まずアインシュタインによる相対性理論が登場して，幾何学との新しく深い関係が明らかになった．特に一般相対性理論は成立当初から，微分幾何学なしではありえなかったし，その後の研究においても密接な関係を持って進んできた．さらに量子力学が 20 世紀前半に成立，発展するにつれ，関数解析学が数学のほうで発展していき，その後さらに一段と現代的な数学との関連が明らかになり，いろいろ波はあったが，場の量子論の発展や，超弦理論の登場により，近年ますます物理学と数学の関連は深まる一方である．もはや数理物理学と関係ないと言える数学分野を探すことの方がずっと困難な状況であるが，そのような近年の発展において，代数的な見方の有効性が数学，物理学の双方において顕著になってきている．そうした関係のいくつかについて例にとって解説していきたい．

2. 作用素環

私の専門は作用素環論である．本特集では，私の記事のすぐ後に荒木不二洋先生の「作用素環と物理学」が載ることになっており，荒木先生こそ長年にわたり，場の量子論･統計力学と作用素環論の関連を中心になって研究されてきたご本人であるので，詳しいことはそちらに譲るが，初めに簡単に作用素環のことにふれておきたい．このあとで私がふれるさまざまな話題の考え方の基になっているからである．

量子力学においては，物理量は数ではなく，無限次元のヒルベルト空間上の線形作用素で表される．そこで，普通の数を掛けたり足したりするように，作用素たちも掛けたり足したりしたい．作用素というのは大体無限次元の行列のようなものだから，行列が掛けたり足したりできるように，作用素も掛けたり足したりできるはずだが，無限次元であるための困難が発生する．それは一般の作用素は (今は非有界閉作用素というものを考えているので) 行列とは違って勝手なベクトルにほどこすことはできないということである．このため，

作用素の定義域は今考えているヒルベルト空間の部分空間になり，これは一般にはヒルベルト空間全体にはならない．しかも，この定義域は作用素ごとに違うため，作用素 T と作用素 S を足そうとすると，$T+S$ の定義域は T の定義域と S の定義域の共通部分になって一般には縮んでしまう．掛けたり足したりしようとするたびにこの定義域の問題が発生し，自由な演算ができなくなってしまうのである．この難点を解消する一つの有効な考え方は，定義域がヒルベルト空間全体であるような作用素だけを考えることである．このような作用素は，有界作用素と呼ばれ，有界性の条件は適当な意味での連続性とも同じことである．そこで有界な線形作用素だけを考えていれば，自由に掛けたり足したりすることができるので，そのような代数演算ができる集合としての環を考えることが自然になる．たとえば量子力学においては，しばしば有界でない自己共役作用素が，物理量を表すものとして現れるが，そのスペクトル分解に現れる射影作用素たちを一斉に考えれば有界作用素だけを用いて実質的に同じものを考察することができるのである．このようにして，フォン・ノイマンは作用素環 (現在フォンノイマン環と呼ばれているもの) の概念に到達した．フォン・ノイマンは「量子力学の数学的基礎」で有名なように，量子力学の数学的な取り扱いについての当時最高の専門家の一人であった．

このようなアプローチにおいて重要な考え方は代数関係の表現である．特に作用素環論に限らず本稿全体において重要な考え方なので，このセクションの最後ではこれを置いて説明しておこう．代数的な関係とは $xy+yx=a$ のようなものである．掛け算と足し算がある集合ならばこのような関係を考えることができる．こういった関係式は量子力学においてしばしば，さまざまな (反) 交換関係として現れる．そこで抽象的にこのような関係式で定まる代数系を考える．これ自体をヒルベルト空間に作用させて作用素環とみなすこともしばしば可能である．そして，この関係式を満たすような他の作用素の組は，この抽象的な代数系の表現だと思うのである．このような抽象的代数系の表現論を先に展開しておくことによって，さまざまな関係式を満たす作用素たちの研究が統一的に表現論として展開できるようになる．場の量子論に対する作用素環的アプローチ (「代数的場の量子論」と呼ばれる) では，このような表現論がドプリッカー・ハーグ・ロバーツによって 30 年以上前に展開され，現在のホットな話題につながっているのである．

3. 無限次元リー環と頂点作用素代数

抽象的代数系とその表現として重要なものにはまず，リー群とリー環の表現がある．特に量子力学以来，さまざまなリー群が物理系の対称性を表す代数系として重要な役割を果たしている．たとえば素粒子論においても必須の道具である．表現を考える際には，リー群でもリー環でもほぼ等価であるが，リー群の表現の方が代数的取り扱いやすいことが多い．これについては，本特集に国場先生の記事があるのでここでは深入りしないが，これと関連して頂点作用素代数について少し触れておきたい．「物理を語るための代数という言葉」にぴったりの題材であり，また私の専門である作用素環とも密接な関係があるからである．

まず通常のリー群 G のかわりに，円周 S^1 から G への滑らかな写像全体 $C^\infty(S^1,G)$ を考えたものがループ群である．像は G 内におけるループと思えるし，各点での値を掛けることにより群と思えるからである．これはまた，G 内の弦を考えているとも思えるので弦理論とも関連して重要なものである．通常のリー群は定義によって有限次元であるが，このループ群は適当な意味で無限次元リー群と思うことができる．これに対応する無限次元リー環にあたるものがあり，アフィン・カッツ・ムーディ・リー環とも呼ばれる．これの表現がやはり重要であるのだが，それは無限次元線形代数という意味で代数的に研究することができ，多くの重要な結果が知られている．これも代数的な見方の有効性を示す例に成っている．しかしここ

で説明したいのは，無限次元リー環そのものではなく，さらにそれを細工して得られる頂点作用素代数と呼ばれる，より高度な代数系である．

「場」とは単純に言えば，時空の各点で物理量が対応しているものである．たとえば磁場であれば時空の各点で磁場ベクトルが対応している．量子力学においては，物理量を作用素で表すので，時空の上の作用素に値を持つ関数を考えたい．しかしここで，通常の関数のかわりに δ-関数のような,「作用素に値を持つ超関数」まで考えないと都合が悪いのである．さらに，ここで自然に出てくる作用素は，前のセクションで述べた有界なものには通常ならない．これによって,「量子場」として，有界でない作用素たちに値を持つ，時空上の超関数を考えることになる．このような数学的対象をきちんと公理化したものが，ワイトマン場と呼ばれるものである．これ自体はかなり昔からあるものだが，超関数であったり，出てくる作用素が有界でなかったり，あまり扱いやすいものではない．この扱いにくさを回避する一つの方法が，上で述べた作用素環論に基づく代数的場の量子論だが，それは荒木先生の記事にまかせて，ここでは，別の数学的手法を説明する．それが頂点作用素代数である．

特殊相対論に基づく設定で考えているので，考える時空はミンコフスキー空間である．当然 3+1 次元がもっとも自然な時空なので，昔から 4 次元ミンコフスキー空間での研究が行われており，一般論はうまくいくのだが，例が物理的に自明なものしか作れていないという根本的な困難がある．ところが近年，$1+1$ 次元で時空の高い対称性を要求した，共形場理論というものだと，興味深い例が大量に作れて数学のさまざまな分野と重要な関係があることがわかってきた．これは超弦理論の立場からも重要である．この理論を完全に代数的な方法でフォーミュレートしたものが頂点作用素代数である．頂点作用素とはある種の，作用素に値を持つ超関数の名前で，それらのなす代数系ということでこのような名前がついている．

空間 1 次元と時間 1 次元のミンコフスキー空間で考えているのだが，これを時間と空間を混ぜた形で 1 次元ずつの空間に分解し，その片方をコンパクト化した円周 S^1 を考える．これが今,「時空」にあたる基本となる空間である．もう時間と空間は混ざっていて，合わせて 1 次元分しかないがかまわないのである．この上の，作用素に値を持つ超関数を考える．S^1 上の普通の関数，あるいは超関数がフーリエ級数に展開できるように，今考えている作用素に値を持つ超関数もフーリエ級数に展開できる．普通の関数，超関数のときとの違いは，フーリエ係数が数ではなく，(有界とは限らない) 作用素であるということである．これによって，作用素に値を持つ一つの超関数から，そのフーリエ係数として可算無限個の作用素が発生することになる．これらの作用素の定義域がまた問題になるのだが，今は，共通の稠密な部分空間 (有限エネルギーのベクトルと呼ばれるものたちのなす部分空間) があるとする．これらの有限エネルギーベクトルを量子力学の用語で状態と呼ぶが，さらに，量子場と状態の対応というものがあると考え，一つ一つの状態ベクトルから，上のような作用素に値を持つ超関数ができると考える．するとそのフーリエ級数の係数を考えることにより結局，一つの状態ベクトルから可算無限個の作用素が生じるわけである．これらの作用素のなすべき条件を代数的に公理化したものが，頂点作用素代数の公理である．それらは本来は，作用素の結合法則など，理解しやすい条件から来ているのだが，可算無限個の作用に関する公理の形に書いてしまうと，直感的な意味はほとんどわからないような複雑なものになってしまう．

この頂点作用素代数と言うのは比較的新しい概念で，80 年代にボーチャーズらによって見出された．この理論の成立には興味深い背景があるので少し触れておこう．有限単純群の分類の完成が宣言され，その分類リストの中には 26 個の例外型の群 (散在群と呼ばれる) が含まれていた．その中で位数最大のものがもっとも不思議な群であり，モンスターと呼ばれていた．一方，古典的な代数学でよく研究されていた j-関数と呼ばれるモジュ

ラー関数というものがあるのだが，マッカイは，j-関数のフーリエ級数展開に現れる係数と，モンスターの既約表現の次元の間にまったく予想外の関係を見出した．この関係を整理して，予想の形にしたのがムーンシャイン予想と呼ばれるものである．(「ムーンシャイン」とは月の光のことではなく,「たわごと」といった意味の英語の俗語である．有限単純群とモジュラー関数はあまりにかけはなれており，それらの間に不思議な関係があると言うことがあまりにたわごとじみているためにこの名前がついた．) このムーンシャイン予想は,「ある新しい代数系があってそれは $\cdots$ 」という形をしているので，そもそもその代数系は何かと言うことから考え始めなくてはならない．このようにして，頂点作用素代数の公理系が誕生したのである．つまり，一般論が最初にあったわけではなく，特別な例 (の候補) が先にあり，その一つの例を研究するために一般論が作られたのである．この一つの例はムーンシャイン頂点作用素代数と呼ばれており，その構成と，代数系としての自己同型群がモンスターであることは，フレンケル・レポウスキー・マーマンによって示された．ボーチャーズはこのムーンシャイン頂点作用素代数に対してムーンシャイン予想を解決して 1998 年のフィールズ賞を得た．このセクションの最初に述べたような無限次元リー環から，頂点作用素代数が作れることが知られている．この意味で，頂点作用素代数は無限次元リー環の高級版のようなものと思うことができる．

この頂点作用素代数の理論においても表現を考えることがたいへん重要である．表現という代わりに，代数系のモジュールと言ってもよく，頂点作用素代数の場合はこちらが普通の用語である．ここでも，重要な関係式を抽象的な代数系における関係としてとらえ，それの，ほかの空間への表現を考えると言う見方が重要になっている．超ビラソロ代数の表現も用いてこの文脈で，さまざまな超対称性も研究することができる．

4. テンソル圏

物理学に現れる構造を記述する代数系ということで，もう一段抽象度の高いものとしてテンソル圏を取り上げよう．これ自体はかなり前からある考え方だが，上で述べた，作用素環や頂点作用素代数，さらには量子群などの表現論を記述するからくりとして近年多くの人の関心を集めているものである．

テンソル圏の「圏」はカテゴリーの訳であり，圏と関手の「圏」である.「テンソル」がついているのはテンソル積に当たる演算の公理が入っているからだが，今それは別に重要ではない．圏と関手と言えばそれだけではアブストラクト・ナンセンスの典型のようなもので，何の中身もないと言ってもよいようなものである．公理を書いてもあまり意味がないので，具体例を考えてみよう．

有限群を一つ決める．その既約ユニタリ表現たちは，ユニタリ同値の意味で有限種類しかなく，すべて有限次元である．そのような既約ユニタリ表現を (同じものでもよいから) π, σ と二つ取ると，テンソル積表現 $\pi \otimes \sigma$ が定義できる．これは一般には既約ではないので，既約分解を行うと，今考えている有限種類のものたちに (多重度つきで) 分解する．このとき，$\pi \otimes \sigma$ の既約分解が既約表現 ρ を含むとすると，インタートワイナーの空間 $\mathrm{Hom}(\pi \otimes \sigma, \rho)$ が定まり，ゼロでないベクトル空間を与える．だいたいこのように，既約表現のようなものとテンソル積，既約分解の概念があって，インタートワイナーの空間がしかるべく定まるようなものを公理化したものがテンソル圏である．

基本的に，何らかの表現が対象，インタートワイナーが射であるような圏を考えている．対象については次元に当たる概念があり，もはや自然数ではなく，正の実数値を取る．(正確な公理を書いていないのでいろいろごまかしているし，本当は「テンソル圏」の前に適当な形容詞をつけないと今考えたいものをきちんと指定したことになっていないが，今そのような細かい点は別に問題ではない．) 抽象的なテンソル圏の対象は，上の例で言え

ば，作用素環の表現だったり，頂点作用素代数のモジュールだったり，あるいは別の例を挙げれば量子群の表現だったりするのである．したがってたとえば，対象の実態は，無限次元ヒルベルト空間で，作用素環がしかるべく作用しているものであったり，また射の実態はそのようなヒルベルト空間の間の適当な有界線形作用素であったりして，条件をきちんと書くとかなり面倒なものである．しかし，そういった，対象や射は本当は何であるかということはまったく重要ではないと言うことが，今のポイントである．どの対象とどの対象をテンソル積するとどのように分解するか，どの射とどの射を合成するとどのような射になるか，といったことだけが重要なのである．対象がもともとヒルベルト空間であったかどうかといったこともどのでもよいのである．このような考え方は，一つ一つのものが何であるかより，それらの間の関係の方が重要であると言うことで，グロタンディークによって，最も徹底的な形で研究されたと言ってもよい．今の状況はグロタンディークのものより簡単だが，基本的な考え方は同じである．ガロア群はもともと方程式の根の置換のなす群として考えられたが，重要なことは，どの根をどの根に写すかではなく，どの置換とどの置換を合成するとどの置換になるかであることと似たような話であると言ってもよい．

このようなテンソル圏の有効性を別の数学的側面から見たものが，量子位相不変量の理論である．位相不変量とは，位相空間などを区別するための量であるが，特に作用素環から発生した結び目のジョーンズ多項式に始まる一連の不変量を量子位相不変量と呼ぶ．いろいろなものが今では知られているが，典型的なものは，結び目や 3 次元多様体に対して，数や多項式を対応させるものである．最近流行の結び目のコヴァノフ・ホモロジーもこの一種である．ジョーンズ多項式は，部分因子環と呼ばれる，作用素環二つの組から作られたが，その多項式を決めるにはしかるべき点たちの上での値がわかればよく，その値を見るには，作用素環の表現から生じるテンソル圏があればよいこと，このテンソル圏は，量子群の表現や頂点作用素代数のモジュールから生じるものと「同じ」であることがわかってきた．ここでも，圏の対象が実際になんであるかと言うことは重要ではないと言うことが現れている．テンソル圏の代数的構造だけを考えると言うことが，3 次元空間の研究にも有用なのである．このような考え方に基づいて，今日では量子位相不変量は大量に作られている．多すぎてその関係がよくわからないと言ってもいいくらいである．ただ，量子位相不変量の意味を考えたり，実際に計算したりすることを考えると，テンソル圏をどのようにして作ったかに戻って，作用素環なり，量子群なりの性質を考えてみることが有効であることも多い．

5. 最後に

以上の解説は私自身に関係する分野が中心になっているという意味でもちろん偏っており，これらとは別にもさまざまな重要なテーマがある．それらについてはほかの先生方にいろいろ記事を書いていただいているので，最後にそれらの内容について簡単に紹介しておこう．荒木先生には，上述のような作用素環に基づく物理学へのアプローチ一般について詳しく解説していただいた．さらに量子力学における問題の取り扱いについて，小嶋，松井両先生の記事がある．藤井先生の記事もこの方面で，最近注目を集めている量子計算に現れる具体的な問題について解説していただいている．また上でも少し触れたリー代数の応用についての具体的な話題は，国場先生の記事に詳しい．現代的な幾何学における代数的問題との関連については，位相幾何学との関連について河野先生に，弦理論との関連について細野先生にお願いした．少し毛色の違うものとして，統計力学に関連して無限グラフについての問題について樋口先生に解説していただいた．これらのテーマについての古典的名著については新井先生の紹介がある．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）