MATHEMATICAL SCIENCES

April 2004 Number 490

特集／演算子・作用素の魅力

演算子・作用素というパラダイム

河東 泰之

1. 演算子・作用素とは何か

演算子・作用素はいずれも英語の operator の訳である．伝統的に物理学では演算子と訳され，数学では作用素と訳されているので，本特集でも著者によってそれぞれの用語が使われているが同じ物を指している.（ついでに中国語では算子と訳している.）以下本文でいちいち両方並べるのもわずらわしいし，私は数学者なので，ここでは作用素と言うことにしよう．作用素とは，ある集合からある集合への写像のことであり，この「集合」や「写像」にどのくらいの条件を課すかは場合によるが，普通は集合としてはベクトル空間くらいを要求してその上での線形写像を考えることが多い.（非線形の微分作用素もたくさんあるが.）ベクトル空間の係数は任意の体でもよいが，解析的なことを考えるときはたいていは複素数か実数である．さらにベクトル空間も無限次元を考えることが普通である．有限次元で考えてももちろんよいが，その場合は線形写像は行列で表されるのでわざわざ作用素などと言わなくても通常の線形代数学でカバーされる．無限次元ベクトル空間での線形代数学にあたるものが関数解析学であり，そこでは通常無限次元空間の位相を考えている．そのような無限次元ベクトル空間は典型的には，バナッハ空間，ヒルベルト空間などと呼ばれるものである．以下主にヒルベルト空間の場合について説明するが，位相を考えない無限次元ベクトル空間上の作用素も，数学，物理学のさまざまな局面で現れることにも注意しておく．

さてもう少し詳しい話に入る前に，全体的な枠組みについて説明しておこう．私の専門である作用素環論は作用素のなす代数系を研究するものであるが，竹崎によるその専門書[3]の序文では，作用素環論は現代の数論であるという考えが述べられている．それはつまり，数の概念をどんどん拡張していくことによって作用素に到達するということである．自然数から始まって，整数，有理数，実数，複素数と数の概念は順を追って拡大されてきた．人類の歴史においても，我々が数学を学ぶ順序においてもそうである.（このほかに 4 元数もあるが）作用素はこのような数の体系を拡張したものと思えるわけである．もちろん複素数 α に対し，ベクトルを α 倍するという作用素を対応させれば，これは加減乗除の演算を保っているので，このような意味で作用素が数概念の拡張になっていることは明らかである．また，実数から複素数に広がる時に，大小比較の可能性が失われたように，複素数から作用素に広がるときには積の可換性が失われ，またゼロでない元は逆元を持つという性質も失われる．しかしこれだけでは，作用素は数ではない別の何かであるとも考えられ，「数」

の拡張であると考える理由としては不十分かもしれない．これに対する一つの強力な答えはやはり，量子力学であろう．それまで数であることが明らかであると思われてきた物理量は実は，作用素と思わなくてはいけないということがわかったからである．この方面については本特集の論説で詳しく解説されるはずなのでここではこれ以上ふれないが，物理的な量について調べたいと思っていたら必然的に作用素に行き着いてしまったということは大変重要なことである．そして数のなす環や体の理論が数学において基本的なものであることは言うまでもない．これらの理論の現代版が作用素環論であるというのが，竹崎のメッセージであろう．

さらに作用素のはたらくべきベクトル空間についても少し説明を加えておこう．上で述べたとおり，代数的に考えるだけならば別に位相を考える必要はないし，実際そのような設定で作用素を考えることは少なくない．たとえば無限次元リー環とか，頂点作用素などがその例である．しかし極限の学問である解析学の力を使って作用素の性質を調べようとすれば位相が必要である．それは簡単に言えば，ベクトルの長さを測る方法が与えられているということである．そして無限次元では都合のよいベクトルを一気に得ることは難しいので,「だいたい近い」ものを次々に作ってその極限として望ましいものを得るという論法がよく用いられる．このような極限論法を用いるには極限の存在が何らかの方法で示されなければならず，それを保証する条件が完備性である．互いにどんどん近づいていくものにはちゃんと行き先がある，ということを意味している．完備性を持った（無限次元）ベクトル空間にはその他の条件の課し方によって，ヒルベルト空間，バナッハ空間，さらにはフレシェ空間などいろいろあり，それぞれに有用なものである．そしてバナッハ空間やフレシェ空間の上の作用素に関する重要な理論はたくさんあるが，ここでは話を簡単にするため，ヒルベルト空間に話を限ろう．量子力学に現れるものもヒルベルト空間だし，数学的にももっとも基本的かつ重要な無限次元空間でもあるからである．バナッハ空間ではベクトルの長さだけが測れるが，ヒルベルト空間では内積があるためベクトルの間の角度も測ることができる．特にベクトルの直交という概念が考えられ，これが大変強力なものである．複素係数の有限次元ベクトル空間はみな，次元を n とすれば $\mathbf{C}^n$ に同型であり，$\mathbf{C}^n$ だと自然に内積が入っているため，素朴には内積があって当たり前のような気がするかもしれないがそうではない．この内積のため,（可分な）無限次元ヒルベルト空間はすべて互いに同型となり，特別によいものが一つだけあるということになるのである．これに対し,（可分な）無限次元バナッハ空間にはいくらでも変なものがあると言ってもよく，その全貌はまだまったくよくわかっていないし，将来もわかるとは思えないものである．つまり，作用素という以前にベクトル空間自体がよくわからないと言ってよい．これに対し，ヒルベルト空間の方は空間自体はよくわかっているので安心して作用素の方の研究に専念できるのである．

2. 作用素としての行列

さて上で述べたように，我々は主に無限次元（ヒルベルト）空間上の作用素の興味があるのだが，有限次元空間の場合の作用素，すなわち行列についてもう一度考えてみることは無駄ではない．実際，作用素を「とても大きなサイズの行列」のように考えることは重要かつ有効な考え方である．数と作用素のもっとも大きな違い，すなわち作用素の積は可換でないと言うことももちろんすでに行列の段階で明らかに現れている.（「作用」素とはもちろん作用するものであり，一般に A の作用をしてから B の作用をするのと，その順序を入れ替えたものが同じではないということはむしろ当たり前であることに注意しよう.）行列の理論である線形代数学は大学 1 年生で教えるものであるため，かなり初等的なものであるように思いがちだし，私が昔線形代数学を習ったときも「先がずっと続いている微分積分学に比べて線形代数学は底が浅い」

というようなことを言われたことがあるが，本当は行列の理論は十分に深遠なものである．サイズを大きくしていったとき行列たちの様子が漸近的にどうなるかということは，現在も盛んに研究されており，未解明の問題も数多い．

そうは言ってもまず，簡単な場合から考えてみよう．初等的な線形代数学の終わりごろにやる基本定理はジョルダン標準形と正規行列のユニタリ対角化であろう．このうち前者は可逆行列ではさみ，後者はユニタリ行列ではさむことによって簡単な形にするというものである．可逆行列は線形空間としての同型写像であり，ユニタリ行列は（有限次元）ヒルベルト空間としての同型写像である．つまり，ジョルダン標準形は有限次元線形空間（あるいは有限次元バナッハ空間）の上の作用素に関する定理であり，ユニタリ対角化は有限次元ヒルベルト空間の上の作用素に関する定理である．行列の場合は最初から成分表示されているために，線形空間の上に内積がすでに自然に入っているような気がしてしまうが，本来そういうわけではない．有限次元の関数空間でも自然な内積は入っていないということはいくらでもある．自然な基底がないと言ってもよい．この場合線形作用素は行列と同じだ，と言っても行列に書く自然な方法が存在しないことになる．これと同様に，行列 A の共役転置行列 A^* を取るという操作も有限次元ヒルベルト空間の構造を必要とする演算である．共役転置行列という操作を考えるには A を成分表示しなくてはならないが，それには基底を選ばなくてはならない．抽象的に A を有限次元線形空間上の線形作用素と思ってしまうと，線形空間としての基底の取り方によって共役転置行列が変わってしまうので，線形作用素に対する演算としてはwell-defined ではないのである．これに対し，内積が入っている空間で正規直交基底を取るのであれば，共役転置行列は正規直交基底の取り方によらず定まるのである．この $*$ を取るという演算は無限次元の作用素に対して非常に重要な役割を果たす．

さて正方行列の固有値の数は多重度もこめてちょうど次元の数だけあるので当然有限個で離散的である．無限次元の作用素ではもちろんこれは成り立たず，スペクトルというものを考えなくてはならない．また，正方行列の積については右逆元があれば左逆元も自動的に存在して等しくなるが，これも無限次元ではなりたたない．このように無限次元空間の作用素は有限次元の場合と違う性質をたくさん持っており，このような無限次元特有の現象を調べることこそ面白いと言える．しかし，無限次元作用素，さらにはそれらの代数系のさまざまな性質は有限次元の行列でかなりよく近似できることも最近いろいろとわかってきている．だからサイズの大きい行列のこと，特にサイズが大きくなっていくときの漸近的性質がよくわかれば無限時限の作用素のこともかなりよくわかると言ってよく，有限次元もそうバカにしたものではないのである．特に 2×2 の行列はサイズが小さすぎていろいろと特別に簡単になっていることがあるが，3×3 ですでにいろいろと難しいことが起きてくるのである．さらに関数を成分とした行列を考えれば無限次元の作用素にかなり近いところに来ているのであって，そこから無限次元の構造の解明の手がかりが得られるのである.（数ではなく，より一般の元を成分とする行列も大変重要なものである．その「一般の元」として最初から作用素を取ることもよく行われる．そこまでいかなくても関数くらいにしておいても無限次元の作用素の本質にかなりの程度迫ることができるのである.）

3. 関数解析学

さて上でも述べたように，無限次元での線形代数学を解析的に行うのが関数解析学である．これについても少し説明してみよう．歴史的にはヴォルテラによる 19 世紀末の積分方程式の研究から関数解析学が誕生したと言えるであろう．すなわち関数をベクトルと思い，それらのなすベクトル空間とその上の作用素を考えると言うことである．関数のなすベクトル空間だけを考えてもいいかもしれないがそれだけではほとんど役に立たないの

で，関数の空間とともに，その上にはたらく作用素を考えることは最初から一体となっていた．関数に対してもっとも基本的な演算は微分や積分であり，これらの演算は線形である．そこで線形作用素を考えることが基本的になる．もちろん非線形の微分方程式を考えることも重要であり，そのような方程式は現在も盛んに研究されているがここでは線形のものだけを考えることにする．解析学として無限次元空間を扱うためには位相が重要である．そこでしかるべき位相について連続な線形作用素がもっとも重要な対象になる．関数空間のしかるべき位相としてもっとも基本的なものは L^2-内積によるものである．これによって，L^2-関数の空間がヒルベルト空間になるからである．しかし，微分作用素はこの位相で連続でない．と言うか，そもそも微分作用素は通常 L^2-関数たちの上では一般に定義されていない.（実数上の一般の L^2-関数はもちろん微分可能ではない.）これをクリアする方法はいろいろあるが，一つは微分の代わりに積分の方を考えるというものであり，ヴォルテラ自身が考えたのもこれである．積分作用素はしかるべき設定のものでコンパクト作用素と言われるものになり，これは無限次元空間にはたらく作用素の中でも特に有限次元の作用素に近い性質を持っているたちのよいものになるので，とても簡明な理論が出来上がる.（有限次元空間では有界閉集合がコンパクトになり，このことが初等解析学のあらゆる局面で重要な役割を果たしている．無限次元空間ではこのことが成り立たなくなるために話が難しくなるのだが，コンパクト作用素というのはこの点で難しいことが起こらないクラスの作用素である.）また，微分作用素がうまくはたらけるようにヒルベルト空間を L^2-空間から取り替えてソボレフ空間というもの代わりに考えることもよく行われている.（シュヴァルツの）超関数を使う方法もあり，この方法はヒルベルト空間によらないものだが，完備な関数空間を使うと言う点では同類とも言える．さらにもう一つ別の方法として，閉作用素と呼ばれるものを考えることもある．これは作用素がベクトル空間全体で定義されていることをあきらめて，稠密な部分空間で定義されているだけでよいことにして，そのかわりに「閉」であるという，連続性より弱い性質を要求するものである．これらの方法はいずれも関数解析学の基本的な手法に根ざしており，関数解析学を学ぶものは誰でもこういったことを習うことになる．

さらに作用素のより詳しい性質を調べようとすれば当然，上で述べたジョルダン標準形やユニタリ対角化の無限次元版が考えられる．後者の方はスペクトル分解といわれる基本的な定理である．微分作用素のような閉作用素も含めた自己共役作用素のクラスで知られており，大変応用範囲の広いものである．これに対しジョルダン標準形の無限次元版にあたる定理はうまくいっていない．上で述べたように，ジョルダン標準形は有限次元バナッハ空間上の作用素に関する定理と思えるので無限次元バナッハ空間で類似物を考えることができるがうまく対応する定理を得ることができない．空間の方をヒルベルト空間限定すればもっとたちがよくなると期待されるがそれでもうまくいかない．ジョルダン標準形とは空間を一般固有空間に分解することだと言えるが，無限次元ヒルベルト空間 H 上では，有界線形作用素 T に対して，$TK \subset K$ となる部分空間 K で $K \neq 0, H$ となるものがあるかどうかさえまずわかっていないのである.（これは不変部分空間の問題と言われる有名な未解決問題である.）

もう一つ，歴史的にはややあとになるが，関数解析学の発展の大きな原動力になったものは量子力学である．ヒルベルト空間やその上の作用素が，我々の住んでいるこの時空の理解に本質的にかかわっているというのは偉大な発見であった．そして作用素論，作用素環論において基本的な成果をあげたフォンノイマン自身が，量子力学の数学的基礎[4] を与えた当人である．スペクトル理論もこの分脈でフォンノイマンによって研究され，基本的な性質が明らかにされている．作用素環論の方は，フォンノイマンが創始者と言ってよいが，量子力学への応用というのは最初から基本的な動機

のひとつであった．ただしフォンノイマンが直接期待したような方向での応用はなかなかうまくいかず,「正しい」応用の方法がわかるまでにはその後の多くの時間と多くの人の努力を必要としたのであった．

4. 数から関数へ

行列とは別に，ある集合の上の複素数値関数と言うのも，数概念のある種の拡張と思える．なぜならば，関数同士をかけたり足したりできるからである．(もちろん割るためには関数がどの点でもゼロでない値を取っている必要がある.）その「ある集合」に何らかの構造が入っている場合にはそれに応じて関数の方にもさまざまな条件，つまり可測とか，連続とか，微分可能とか，正則とかいったものを考えることができる．そしてそういった関数同士をかけたり足したりしてもそのような条件は保たれることが多いので，そのような関数の集合を考えれば数の体系の一般化と言えるであろう．(もちろん「一般化」と言うのには数を関数と同一視できる必要がある．たとえば定数関数が今考えている集合に入っていればよい．また,「可積分」のように普通に関数をかけたら保たれない条件もある.）

しかしより適切には数の概念を拡張したというよりは空間が関数に形を変えたとも考えられる．つまり１点上の複素数値関数というのが複素数と同じことなので，この１点が一般の空間に変わったものを考えるということである．(ここでは「空間」という言葉はかなり漠然と使っている．ある構造を持った集合，というくらいの意味である．ベクトル空間のことではない.）たとえばコンパクトハウスドルフ空間 X を考えよう．このとき X 上で連続な複素数値関数全体を $C(X)$ と書こう．この $C(X)$ はかけたり足したりできるので環をなしているが，この環だけをおぼえていれば位相空間 X は復活できるのである．すなわち位相空間 X の情報はすべて環 $C(X)$ に保存されている．(今これを書いていて思い出したが，私は大学３年生のときこの定理を今は京都大学にいる加藤和也先生に習った．「この環はもとの空間の恩を忘れない立派な環ですねえ.」というお言葉であった.）空間の構造にもよるが，だいたいは（ある性質を持った）関数の環を考えるということが,（その性質に対応する構造を持った）空間を考えると言うことと同じことなのである．この考え方は関数から作用素に移ったときにさらに強力なものとして現れてくる．すなわち，空間の代わりに関数環の方を実態だと思え，さらに可換性を落としたもっと一般の環を考えよ，ということである．次のセクションでこのことをさらに解説しよう．

5. 作用素環と空間概念

上で，行列も関数も数の概念の拡張と考えられると言うことを説明した．もちろんこの両者は同じではない．そしてこの両者の同時拡張と思えるのが作用素である．そしてその作用素の環を考えることが空間概念の拡張になっているのである．この考え方を徹底的に推し進めたものがコンヌの非可換幾何学[1, 2] である．ある測度空間の上で,（ほとんどいたるところ）有界な可測関数たちを考えるとこれらは和や積について閉じており，環をなしていることがわかる．そしてこれらは，掛け算によって L^2-関数たちに作用するので，L^2-関数たちのなすヒルベルト空間の上の作用素の環とみなすことができる．これはもちろん可換環である．そこで，一般の作用素のなす環を，可測関数の環の非可換版だと思って,「非可換積分論」という名前で呼ぶのである．数学全体の中では，作用素やその環の研究の歴史は新しい方に属するが，このアイディアは相対的には古くからあり，数十年前からこのように考えられてきた．(ついでに言うと，普通の積分論で使っている関数の積の可換性は実は，たいていはもっと弱い形，つまり $f(x)g(x)$ の積分と $g(x)f(x)$ の積分は一致する，ということである．そこで，作用素 T, S を考える場合は，TS と ST が違っていても，しかるべき汎関数 ϕ があって，$\phi(ST) = \phi(TS)$ となっていれば普通の積

分論のマネはかなりうまくいく．行列の場合このような性質を持つ汎関数はトレースなので，このような汎関数も作用素環上のトレースという．つまりトレースがある作用素環では，積分論のマネはよくできるが，トレースが考えられない作用素環もたくさんあり，特に場の量子論に関連して現れる作用素環はみなそうである．この場合は，より高度な形での非可換積分論が必要になる．冨田-竹崎理論はそのような道具を与えるものである.）一方，似てはいるが少し違う考え方として，前にも述べたコンパクトハウスドルフ空間上の複素数値連続関数のなす環から出発してみよう．このときも，この位相空間にまともな測度，つまり連続関数が可測になるような測度が入っていれば，やはりこれらの関数は L^2-関数のなすヒルベルト空間に掛け算で作用することになる．したがってコンパクトハウスドルフ空間は連続関数環に移ることによって作用素の環と思うことができるのである.（このときちゃんともとの空間の情報を「覚えている」ことは上で述べた.）したがってこの立場からは一般の非可換な作用素環は「非可換なコンパクトハウスドルフ空間」ということになる.（「空間が非可換」というのはかなり飛躍した言い方であることに注意しよう．空間に関数のなす可換環が対応しているので，非可換環は，もはや空間ではない何者かの上の関数のような何者かのなす環であると考え，そのよくわからないものを非可換な空間といっているのである．これはとりあえず名前をつけただけであり，そのように思うこともできる，ということにすぎない.）この考え方もかなり古くからあるものである．しかし測度空間も位相空間も数学的構造としては比較的原始的なものである．空間を調べるというのにはもっと「高度」な構造，たとえば多様体などの非可換版を考えたくなってくる．これを扱うのがコンヌの非可換幾何学である．コンヌ自身,「非可換積分論」において革命的な成果をあげた当人だが，その後は1980 年ごろから非可換幾何学の発展に精力を傾け続けている．これは微分幾何学の非可換化に当たるものを作り，数学･物理学のあらゆる問題に応用しようという壮大な計画であり，その著書[1, 2] は華麗なパノラマとなっている.「非可換（可微分）多様体」の決まった定義があるわけではないのだが，非可換微分幾何学のさまざまな局面を示すと考えられている多くの定理が得られている．たとえばアティヤ・シンガーに始まる指数定理のさまざまな拡張が得られてきている．もともと普通の幾何学の問題であるノビコフ予想に対する非可換幾何学を用いた成果は，普通の空間にだけ興味があると場合でも非可換幾何学の手法が有効であることを示している．また，そのような「非可換空間」の具体例として特に詳しく調べられているものとして「非可換トーラス」があり，たとえばヤン・ミルズ方程式の非可換版などさまざまなことが研究されている．ほかにもさまざまな具体的な例がある．コンヌ自身によれば，非可換幾何学は，通常の解析学や幾何学は言うまでもなく，リーマン予想や素粒子理論にも役に立つのだということで，ほとんど数学・物理学の全分野をカバーする勢いである．この考え方は，最近の（超）弦理論，M 理論でも盛んに応用されており，Internet 上の preprint server である http://arxiv.org で検索をかければ，非可換幾何学をこのような理論物理学の問題に応用した論文がすぐに何百本も出てくるのである．

6. さまざまな分野に現れる作用素（環）

作用素はすでに現代数学・数理物理学の基本的な道具となっているので，数学･物理学のあらゆる分野に現れる．これは当たり前のことであり，位相が現代数学のどこに出てくるかとか，複素関数論がどこで使われるか，とか気にしても意味がないのと同様である．今回の特集ではできるだけ幅広い分野から話題を選んで各著者の方々に作用素のいろいろな側面について原稿を書いていただいているが，私の専門は作用素「環」論なので，特に作用素環論がどのような話題と関連しているかについて最後にふれておこう．しかし，このよう限定してもまだ非常に多くのテーマと関連しており，

作用素環論と無関係なものを探すほうが難しいくらいである．まず，理論物理学との関係では，そもそもフォンノイマンが量子力学の数学的基礎付けを与えたときから，深い関係があるのであって，現在でも場の量子論と密接な関係があるのは当然である．特に場の量子論に対する厳密なアプローチの一つで作用素環論に基づくものを代数的場の量子論と言っている．また，(超) 弦理論や M 理論と非可換幾何学との関連についてはすでに述べた．ほかにも，たとえばシュレーディンガー作用素のスペクトルの性質を調べたりするのにも作用素環論は役に立っているし，(量子) 統計力学においても作用素環の手法はあちこちで使われている．また，作用素環論は，通常の数学の分類では解析学に入るので，代数学とは遠いように見えるかもしれないが，代数学とは，単に環やイデアルや自己同型を考えるといった形式的側面以上の関係がある．リーマン予想に対する非可換幾何学を用いた研究についてはすでに上でふれたとおりである．また，有限単純群モンスターや，それに関係した頂点作用素代数，ムーンシャイン，保形関数とも共形場理論を通じた関係があることは確実であると思われる.（具体的な関係はまだ何もわかっていないが.）あるいはまた，代数幾何学に現れるある種の特異点のディンキン図形による分類も作用素環論に現れる分類と顕著な類似性があり，より深い関係が隠れているものと考えられる．ホップ代数や量子群と，作用素環が関係しているのはすでによく知られているし，リー群やリー環の表現論との関係はずっと昔から続いている．また幾何学では，上でもふれたアティヤ・シンガー型指数定理や K-理論が作用素環論，特に非可換幾何学と関係していることはよくわかっている．それとは別に，ジョーンズによる 1980 年代半ばの，結び目の不変量，ジョーンズ多項式の発見に始まる低次元トポロジーと作用素環論の，それまではまったく空想もされていなかった関係の発展も大きな話題となった．これについても当初の爆発的な進展は収まったかもしれないが，本当の深い理由が解明されたとはまったく言えない状況である．作用素環論はもともと関数解析学の一部だったので，さまざまな解析学との関係は自明だし，確率論やエルゴード理論との関係も昔から深いものがあった上に，最近は自由確率論というものが大きく発展している．これは，環を非可換にしたときには，通常の確率論における独立性の概念の非可換版として自由性というものを考えるといろいろと面白いことがある，というもので，ここでいう「自由」とは「自由群」の自由性と類似のものである．この話題はランダム行列と密接な関係があり，一方ランダム行列とリーマン・ゼータ関数の関係などもよく言われているものである．さらには数学基礎論における超準解析の技法は，作用素環の超積としてかなり前から盛んに使われており，現在では作用素環論における欠くことのできない基本テクニックとなっている．ブール値解析との関係ももっとあるのかもしれない．またそもそも，フォンノイマンは公理的集合論の初期の重要人物の一人であり，フォンノイマン環の初期の発展において集合論，特に濃度の理論との類似が重要なガイドとなっていたことは明らかである．

このように作用素および作用素環の概念は数学，物理学のあらゆる分野で活躍している．今回の特集でその一端を味わっていただければ幸いである．

参考文献

1) A. Connes, “Noncommutative geometry”, Academic Press, 1994.
2) コンヌ,「非可換幾何学入門」（丸山文綱訳），岩波書店，1999 (上記の本[1] のフランス語版からの和訳).
3) 竹崎正道,「作用素環の構造」，岩波書店，1983.
4) フォン・ノイマン,「量子力学の数学的基礎」（井上健他訳），みすず書房，1957.

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）