

解析学 XD・スペクトル理論レポート問題

2020 年 12 月 23 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

以下の問題を解いて、1月21日までにレポートを ITC-LMS で提出してください。

[1] A を Hilbert 空間の上のコンパクト自己共役作用素とする。この A をスペクトル分解するとき現れる単位の分解 $E(\lambda)$ はどのようなものか、記述せよ。

[2] \mathbb{R} 上の Lebesgue 測度を考える。 \mathbb{R} 上の実数値可測関数 $F(x)$ を取り、

$$D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid Ff \in L^2(\mathbb{R})\}$$

とおいて、 $f \in D(A)$ のとき、 $(Af)(x) = F(x)f(x)$ とおくことにより、線形作用素 A を定める。この A のスペクトル分解に現れる単位の分解 $\{E(\lambda)\}$ はどのようなものか、記述せよ。

[3] $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ を複素数列とする。 H を可分な無限次元 Hilbert 空間、 $\{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ をその完全正規直交系とする。 e_n たちの有限 1 次結合全体のなす空間を $D(A)$ とおき、 $D(A)$ を定義域とする線形作用素 A を $Ae_n = \alpha_n e_{2n}$ によって定める。

(1) A は可閉であることを示し、 A の閉包 B を具体的に記述せよ。

(2) A^* はどのような作用素か。具体的に記述せよ。

[4] $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset H$ とする。 $D(A)$ を定義域とする作用素 A を、 $(Af)(x) = f''(x)$ で定める。このとき A は可閉であって、その閉包が自己共役になることを示せ。

[5] A を Hilbert 空間 H 上の有界線型作用素とし、 $A \geq 0$ とする。 $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$ をそのスペクトル分解としたとき、 $\int_0^{\infty} \lambda^{1/2} dE(\lambda)$ は $A^{1/2}$ に等しいことを示せ。

[6] 複素平面の開単位円板の上の正則関数 $f(z)$ で、 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ と Taylor 展開した時に $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ となるようなもの全体のなす空間を H^2 と書く。このような $f(z)$ を $\{c_n\}_n \in \ell^2$ と同一視することにより、 H^2 は Hilbert 空間になる。

$$D(A) = \left\{ f \in H^2 \mid i \frac{1+z}{1-z} f(z) \in H^2 \right\}$$

とおき、 $f \in D(A)$ に対して $(Af)(z) = i \frac{1+z}{1-z} f(z)$ とおく。

(1) $D(A)$ は H^2 で稠密で、 A は対称作用素であることを示せ。

(2) A の Cayley 変換を求めよ。