

1999 年 12 月 24 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

ホームページ: <http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

配点は 1 番から順に, 30, 30, 20, 20, 10 点の 110 点満点です. 平均点は 79.6 点, 最高点は 105 点でした. 得点の分布は次のとおりです. 採点はティーチングアシスタントの勝良君です. 採点ミスがあると思う人は, ただちに申し出て下さい. (返却する答案は, すべてコピーが取ってあります.)

| 0-49 (点) | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 | 90-99 | 100-105 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| 5(人) | 4 | 8 | 10 | 21 | 19 | 12 |

配点, 採点はだいぶ甘くなっています. 期末試験は, もっと厳しくつけることになるでしょう. たとえば, 1 番から順に, 20, 30, 20, 30, 10 点の配点にして, [1] の計算ミスは 0 点, [2] ~ [4] の部分点ももっと厳しくするといった感じです.

以下, 略解を付けます.

[1] 公式どおり計算して,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

となる.

[2] 決まったやり方どおりにやればよい. 答えはたとえば,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である.

[3] 行列式を求めると $(t-2)^2(t+5)$ を得るので, $t=2, -5$ ではないときは, rank は 3 である. $t=2, -5$ のときは直接チェックするとそれぞれ rank は 1, 2 である. よって, rank を最小にする t の値は 2 である.

あるいは rank が 0 にならないことは明らかなので, 1 になるような t を探してもよい.

[4] 固有方程式は $(t-a)(t^2+(a-3)t+a)=0$ なので, これが重根を持たなければ問題の行列は対角化可能である. これが重根を持つような a の値は $a=0, 1, 9$ であり, それぞれ

2
について調べれば，いずれの場合も Jordan 標準型は求める形であることがわかるので，これらが答えである．

[5] まず， A が対角化可能ならば A^2 も対角化可能となって，Jordan 標準型は問題のようにはならないことに注意する．次に A^2 の固有値が単根 0 と 2 重根 1 であることより， A の固有値は単根の 0 と，あと 2 つは ± 1 である．この 2 つが 1 と -1 であれば A は対角化可能になってしまうので，そのような場合はおこらない． 1 が重根の場合， A の Jordan 標準型は 2 通り考えられるが，対角化可能ではないはずなので， 1 通りに絞られて，また，これは確かに O.K. であることがわかる． -1 が重根の場合も同様だから，結局，答は次の 2 つである．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$