数学 IV・固有値と対角化について

1999 年 11 月 5 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

・2 次行列の場合.

[2A] 固有値が，相異なる 2 根，α, βの場合.

α, βに対応する固有ベクトルをそれぞれ x, yとし，$X = (x, y)$ とすれば，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

[2B] 固有値が 2 重根αの場合.

行列 $A - \alpha I$の像を見る．この行列の行列式は 0 なので，像は原点だけか，または直線である.

(1) $A - \alpha I$の像が原点だけの場合.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

である.

(2) $A - \alpha I$の像が直線の場合.

その直線上の 0 でないベクトルを x とする．$(A - \alpha I)x = cx$ となる数 c があるので，$\alpha + c$ は固有値であるが，今固有値はαしかないので，$c = 0$ であり，$Ax = \alpha x$ である．次に x と平行ではないベクトル yを取る．$(A - \alpha)y = ax$ となる数 a がある.

(i) $a = 0$ の場合．場合 (1) の方になってしまうので矛盾する.

(ii) $a \neq 0$ の場合．yを y/a で置き換えることにより，$(A - \alpha)y = x$ とできる．$X = (x, y)$ とすれば，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

になる.

・3 次行列の場合.

[3A] 固有値が，相異なる 3 根，α, β, γの場合.

α, β, γに対応する固有ベクトルをそれぞれ x, y, zとし，$X = (x, y, z)$ とすれば，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

[3B] 固有値が，3 重根αの場合.

行列 $A-\alpha I$の像を見る．この行列の行列式は 0 なので，像は原点だけか，直線か，または平面である．

(1) $A-\alpha I$の像が原点だけの場合．

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

である．

(2) $A-\alpha I$の像が直線の場合．まず像から 0 でないベクトル x を取る．[2B] (2) の場合と同様にして，$Ax = \alpha x$ である．ベクトル y, zを $\det(x, y, z) \neq 0$ となるように取る．この時，$(A-\alpha)y = ax$, $(A-\alpha)z = bx$ となる数 a, b がある．ここで，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ である．

(i) $a \neq 0$, $b = 0$ の場合．$Ay = \alpha y + x$, $Az = \alpha z$としてよい．$X = (x, y, z)$ とすれば，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(ii) $a = 0$, $b \neq 0$ の場合．(i) と同様である．

(iii) $a \neq 0$, $b \neq 0$ の場合．$(A-\alpha)y = x$, $(A-\alpha)z = x$ としてよい．$X = (x, y, y-z)$ とすれば，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(3) $A-\alpha I$の像が平面の場合．

その像から，互いに平行ではない 2 本のベクトル x, yを取る．その平面上で，A を考えればそれは 2×2 行列で表され，その固有値はαだけなので，上の [2B] が適用できる．

(i) [2B](1) の場合．$Ax = \alpha x$, $Ay = \alpha y$である．この時，この平面上にないベクトル zを取って $(A-\alpha)z$を見れば，これは 0 ではない．(これが 0 であれば，$A = \alpha I$となって (3) の仮定に矛盾する．) 改めて，これを x とおき直して，$X = (x, z, y)$ とすれば，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

となるが，これは $A-\alpha I$の像が直線であることを意味し，(3) の仮定に矛盾するから起こり得ない．

(ii) [2B](2) の場合．$Ax = \alpha x$, $Ay = \alpha y + x$ と仮定してよい．この像の平面上にないベクトル zを取って $(A-\alpha)z$を見ればそれは，$ax + by$の形である．

(a) $a = 0$, $b \neq 0$ の時．$b = 1$ としてよいので，$X = (x, y, z)$ とすれば，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(b) $a=0, b=0$ の時．これは $A-\alpha I$の像が直線であることを意味し，(3) の仮定に矛盾するから起こり得ない．

(c) $a \neq 0$ の時．zを $z-ay$で置き換えれば，上の $a=0$ の場合に帰着できる．

[3C] 固有値が，2 重根αと他の根βの場合．($\alpha \neq \beta$.)

α, βに対応する固有ベクトル x, yを取る．行列 $A-\alpha I$の像を見る．この行列の行列式は 0 であり，また yは像に入るので，像は直線か，または平面である．

(1) $A-\alpha I$の像が直線の場合．

原点と x, yの乗っている平面上にないベクトル zを取る．$(A-\alpha)z = ay$となる数 a がある．

(i) $a=0$ の時．$X=(x, z, y)$ とすれば，$\det X \neq 0$ であり，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

(ii) $a \neq 0$ の時．$Az = \alpha z + y$としてよい．zを $z + y/(\alpha - \beta)$ で置き換えれば，(i) に帰着．

(2) $A-\alpha I$の像が平面の場合．

この平面から，yに平行でないベクトル zを取る．$Az = \alpha z + ay + bz$となる数 a, b がある．

(i) $a=0$ の時．$Az = (\alpha + b)z$となり，$\alpha + b$ は固有値である．固有値βに対応する固有ベクトルは yに平行なものだけだから，この固有値$\alpha + b$ はαに等しい．つまり $b=0$ である．$\det(x, y, z) \neq 0$ とすると，$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

の形にできて $A-\alpha I$の像が平面であることに矛盾する．つまり，$\det(x, y, z) = 0$ であり，z の取りかたから，$z = cx + dy$の形に書けて，$c \neq 0$ である．よって，像の平面に x が含まれる．

(ii) $a \neq 0$ の時．$a = 1$ としてよく，$(A - \alpha - b)z = y$となる．$\det(x, y, z) \neq 0$ とすると，$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \alpha + b \end{pmatrix}$$

の形にできるが，この行列の固有値は$\alpha, \beta, \alpha + b$ だから $b=0$ となる．これは $A-\alpha I$の像が平面という (2) の仮定に矛盾する．だから $\det(x, y, z) = 0$ であり，これより $z = cx + dy$の形に書けて，$c \neq 0$ である．よって，やはり像の平面に x が含まれる．

以上より，次の場合を考えればよい．

$(2)'$ $A-\alpha I$の像が平面でその平面に x も含まれる場合．

新たにベクトル zを平面の外に取る．$\det(x, y, z) \neq 0$ であり，$Az = \alpha z + ax + by$となる数 a, b がある．

(a) $a=0, b=0$ の時．$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

の形にできて，$A-\alpha I$の像が像が平面であることに矛盾する．

(b) $a=0, b\neq 0$ の時．$b=1$ としてよいので，$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

の形にできて，$A-\alpha I$の像が平面であることに矛盾する．

(c) $a\neq 0$ の時．zを，$z+by/(\alpha-\beta)$ で置き換えれば，$Az=\alpha z+ax$ とできる．$a=1$ としてよいので，$X=(x,z,y)$ とすれば，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となる．