

答案の一番上の赤い数字が, 1 問 35 点でつけたこのテストの成績, その右の丸囲みの数字が, 演習の成績も加味したこの科目の最終成績です. さらに演習を取っている人にはその右に演習の最終成績が青い数字で書いてあります. 採点に誤りがあると思う人はただちに e-mail で連絡してください. 私はイタリアに行っているので英文/ローマ字でお願いします. 返す答案はすべてコピーが取ってあります.

演習とこのテストの成績に大きな差があって, 片方を落としてしまいそうな人は, 悪い方の点を, 両方の点の平均で置き換えました. これを適用した人の点数には右上にプラス印がついています. この対象者は全部で 5 人です.

[3], [4] は全滅で 1 人もできていませんでした. それで点が多くなるように 1 問 35 点 (140 点満点) でつけました. 平均点は 60.2 点, 最高点は 135 点 (2 人) です. 総合成績の平均は 61 点, 得点分布は次のとおりです.

0-49 (点)	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100
18(人)	13	3	10	8	5	6

[1] これはごく標準的な問題です. $f_x = -6x + 6x^2 + 6xy - 6y^2$, $f_y = 3x^2 - 12xy + 9y^2$ だから, $f_x = f_y = 0$ を解くと, $(x, y) = (0, 0), (1, 1), (9/11, 3/11)$ となります. $f_{xx} = -6 + 12x + 6y$, $f_{xy} = f_{yx} = 6x - 12y$, $f_{yy} = -12x + 18y$ となるので, 普通の判定法により, $(1, 1)$ では極小値 -1 を取り, $(9/11, 3/11)$ では極値を取らないことがわかります. $x = 0$ とおいて y だけ変化させることにより, $(0, 0)$ では極値を取らないことがわかります.

[2] 極座標に変換すると,

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2\sqrt{\cos 2\theta}, -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4\}$$

に移ります. (ここで間違えた人がかなりいました.) あとは E 上で $\int_E r \, dr \, d\theta$ を計算すればよくて, 普通の計算で答えは 4 になります.

[3] 大きい番号だけが問題なので $b_n > 0$ としてかまいません. 正の $\varepsilon > 0$ を任意に取ります. 仮定より

$$n > N \Rightarrow |a_n - \alpha b_n - (a_{n-1} - \alpha b_{n-1})| < \varepsilon(b_n - b_{n-1})$$

となる自然数 N が取れます. $m > n > N$ のとき, 上の不等式を順番に足して

$$|a_m - \alpha b_m - (a_n - \alpha b_n)| < \varepsilon(b_m - b_n)$$

2
がわかります。($\{b_n\}_n$ が単調増大なことを使いました。) 両辺 b_m で割って

$$\left| \frac{a_m}{b_m} - \alpha - \frac{a_n - \alpha b_n}{b_m} \right| < \varepsilon \left(1 - \frac{b_n}{b_m}\right)$$

となります。 $m > N$ なので $m \rightarrow \infty$ とすると $\sup_n b_n = \infty$ より、 $\limsup_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_m}{b_m} - \alpha \right| \leq \varepsilon$ がわかります。 $\varepsilon > 0$ は任意だったので、これは $\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_m}{b_m} - \alpha \right| = 0$ を意味しています。

[4] ほとんどの人が「存在しない」ことを証明しようとしていましたが、それは誤りです。たとえば $f(x) = \frac{\sin x^4}{x^2 + 1}$ が一つの例です。 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ なので一様連続になり、もちろん微分可能です。微分すれば有界でないこともすぐにわかります。直感的には小さい振幅、高い周波数で激しく振動させればこういう関数が作れます。

[5] (1) 積分の順序を入れ替えれば普通に不定積分できるようになります。
 $\int_0^1 \int_y^{10y} \sqrt{xy - y^2} dy dx = 6$ が答えです。

(2) y で先に積分し、置換積分 $y = 2x \cos \theta$ を行います。(内側の積分を行う時には x は定数です。) $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2} dy dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$ が答えです。

[6] $\log(1+t)$ の $t=0$ のまわりでの Taylor 展開に $t = x^2, -x^2$ を代入して引き算すると、問題の関数は

$$2 \left(x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + \dots \right)$$

となります。これはべき級数で収束半径が 1 なので、これ自身が $x=0$ のまわりでの Taylor 展開です。順番に微分しようとすると泥沼にはまります。