

答案用紙の 1 番上に、学生証番号と氏名を書いてください!!

4/14 の演習の時間の小テストの解説です。これは成績にはありません。だから点数もつけてありません。次回からはちゃんと点数をつけて返します。全体の小テストのうち、悪い方から 2 回分を除いた点数の平均によって、演習の成績をつけます。欠席の回は 0 点として扱います。それから、毎回ノート持ち込み可で行います。

今回の問題は、いずれも「正解」がはっきりあって客観的に採点できるような試験問題ではありません。[1] で、面積比較に持ち込んだり、[2] で、平均値の定理からすぐ導いたりするのは、教科書にそう書いてあるという意味では「正解」かも知れませんが、論理的にはいろいろ問題があるのは、下に説明してある通りです。一方、[1] で微分したり、[3] で、指数・対数関数の微分を使うのは、普通に考えれば循環論法ですが、三角関数、指数・対数関数を先に厳密に定義してしまう方法もあり、そのような方法の下では、きちんと正当化できる方法です。重要なのは全体的な論理の展開、流れであって、一部だけを取り出したとき「正しい証明」というのが一つだけあるわけではない、ということも理解してほしいと思います。よく見られたパターンについて下で解説します。

なお、これらの問題は高校で習ったことはけっこう論理的にいいかげんであった、ということを感じてもらうだけのためのもので、このような問題がこれから演習や試験に出るといってはいけませんから、誤解しないでください。

[1] (1) 微分を使う方法 (ロピタルの定理に持ち込むものを含む) がたくさんありましたが、通常、 $\sin \theta$ の微分が $\cos \theta$ であることを示すのに、この極限の式を使いますから、これでは微分の式を何らかの方法で別に示さない限り、循環論法になってしまいます。

(2) $\theta > 0$ の時、面積の比較で、扇型に内接する三角形 $<$ 扇型 $<$ 直角三角形、の式から $\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$ が得られます。ここで $\theta \rightarrow 0$ として、はさみうちで答えが出ます ($\theta < 0$ でも同様。) これは、教科書に書いてあるのですが、「扇型の面積とは何か?」と考えると、最終的には積分を持ち出すことになり、上と同様に循環論法の問題があります。

(3) 円弧や弦の長さの比較に持ち込んでも、 $\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$ が得られます。もともと三角関数における角度は、円弧の長さをもとにしているのです。これのほうが、より「良心的」と言えるでしょう。しかし、それでも曲線の長さとは何か、と考え始めるとまた積分の話になっていろいろ微妙になって来ます。そこまで戻ると、そもそも円周率 π だって怪しい、ということになります。この様な問題点を避ける方法もこれから授業で説明します。

[2] (1) 「 $f(x)$ は、単調増大だから」と書いた人が結構いましたが、それは結論と同じ事を言い直しているだけで、問題はその単調増大性を「証明」することです。

(2) もっともちゃんとした証明は、平均値の定理から、 $c < e < d$, $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(e)$ となる e の存在を導くものです。($a = c$ または $b = d$ の場合も含めて、平均値の定理が使える状況になっています。) すると、 $c < d$, $f'(e) > 0$ から、 $f(c) < f(d)$ がわかります。高校の教科書でもこのように書いてあるものが多いはずですが、ただし、このかんじんの平均値の定理 (あるいはその特別の場合であるロルの定理) の証明が、たいてい絵を描いてごまかしているのです。結局やはり論理的にはごまかしていることになります。

(3) かなり多かったのは、 $f'(x) > 0$ から、 $f(x+h) - f(x) > 0$ を導き、これを繰り返して使えば、単調増大性が示せる、というものでした。これは、一見もっともらしいですが、かなりの飛躍があります。問題は、ここでの h が、各 x に応じて定まる数だ、ということです。たとえば、まず $x = a$ に対して、 h_1 が存在して、 $f(a) < f(a+h_1)$ が言えて、次に $x = a+h_1$ に対して別の h_2 が存在して、 $f(a+h_1) < f(a+h_2)$ が言えて…、としても、 $h_1+h_2+h_3+\dots$ は非常に小さい値に収束しているかもしれないので、これでは b まで届かない可能性があります。このアイデアを元に、厳密にやろうとすると、結局背理法に頼ることになり、上の平均値の定理によるものと本質的に同じ事をやることになります。

(4) また、 $f(d) - f(c) = \int_c^d f'(x) dx > 0$ とする方法もありました。これももっともらしいのですが、積分自体いろいろとごまかしているの、また問題があります。たとえば、 $f'(x)$ は連続とは限らないので、そのような関数の積分とはそもそも何か、といったことが問題です。(区分求積法では一般にできません。)

[3] (1) もちろん、答は自然対数の底 e に収束するのですが、その収束先の存在を証明するというのが問題です。「この極限は存在することが知られており、それを e という文字で表す。」などと書いてある高校教科書もありますが、これは見るからに論理的にごまかしています。

答案では、[1] と同様に対数関数の微分などを使っている人がかなりいましたが、通常の方法では、この極限の存在を示したあとで初めて、自然対数や e^x が定義されるのですから、先にそのような関数の性質を使ってしまうのは循環論法です。

高校の範囲内で最もきちんとした方法はたぶん次のものでしょう。

まず、 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を二項展開して、

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{n \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{1}{n^n}$$

と表します。すると、これは、

$$1 + 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots + \frac{1}{n \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

より小さく、さらに

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = 3$$

より、小さくなります。一方、上の $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ の表示と $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ に対する同様の式

$$1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)n}{2 \cdot 1} \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2) \dots 1}{(n+1)n \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

を比べると、後者の各項の方が、前者の各項より大きい上に、後者の方が項の数が一つ多いことがわかります。すべての項は正ですから、これで、数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1,2,3,\dots}$ は単調

増大で上に有界であることがわかり、収束先の存在がわかります。これだと、証明しないで使っていることは、「上に有界な単調増大実数列は収束先を持つ」ということだけになります。これも高校では当たり前のように使っていますが、厳密な実数の定義に基づく証明はこれから講義で行います。