1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 演習・小テスト解説 (10)

1998 年 6 月 26 日・河東泰之
数理科学研究科棟 310 号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] から順に 20×3, 10×4 点です．平均点は 48.7 点，最高は 90 点 (2 人) でした．

この授業では，$f(x,y)$ が (a,b) で極大値を取ることの定義は,「(a,b) の近くで $(x,y)\neq(a,b)$ のとき，$f(x,\,y)<f(a,b)$ であること」です．したがって [1] (2) では円周 $x^2+y^2=1$ 上では極大値は取りません．ですが,「(a,b) の近くで $f(x,\,y)\le f(a,b)$ であること」という定義を使っている本もあって，こちらだと [1] (2) の関数は円周 $x^2+y^2=1$ 上で極大値を取ることになります．こちらの定義を使っていることがはっきりしている答案の場合は減点してありません．

略解は次のとおりです．

[1] (1) まず，$f_x=f_y=0$ となる点は，$(0,0),(0,1),(1,0),(1/3,1/3)$ の 4 つである．通常の判定法により，このうち極値になるのは $(1/3,1/3)$ だけで，極大値 $1/27$ を取る．

(2) $x^2+y^2=c$ となる円上で関数 $f(x,y)$ は一定値を取るので原点以外では極値は取らない．原点では明らかに極小値 0 を取る．(偏微分すると，$f_x=f_y=0$ となる点は，$(x,y)=(0,0)$ と円周 $x^2+y^2=1$ 上の点になる．)

(3) $f_x=-6x^2+6xy+6y^2+6x$, $f_y=3x^2+12xy+9y^2$ より $(0,0),(1,-1),(9/11,-3/11)$. このうち $(1,-1)$ で極大値 1．(点 $(0,0)$ では通常の方法では極値かどうか分からないが，$x=0$ または $y=0$ とおくことにより極値ではないことがわかる．)

[2] (1) 周期関数なので一様連続になる．あるいは，微分した $\cos x$ が有界なことと平均値の定理を組み合わせてもよい．

(2) 一様連続ではない．$x_n=\sqrt{n\pi}$, $x'_n=\sqrt{(n+\frac{1}{2})\pi}$として $n\to\infty$ とすれば $x_n-x'_n\to 0$ だが，$|f(x_n)-f_(x'_n)|=1$ となるからである．

(3) 微分したものが有界なので，平均値の定理より一様連続である．あるいは直接 $|f(x)-f(x')|$ を計算して評価してもよい．あるいは，$\lim_{n\to\pm\infty} f(x)=0$ であることを使ってもできる．

(4) $|f(1/\delta)-f(\delta+1/\delta)|$ を計算して，一様連続ではないことがわかる．