

5 月 29 日の講義は 5 月祭のため休みです

配点は [1] から順に 40, 30, 30 点です。[1] は定義がちゃんとわかっているかどうかだけの問題です。間違えた人はよく復習しておいてください。[2] はちょっと、[3] はかなり難しいでしょう。平均点は 42.8 点、最高は 100 点 (1 人) でした。

[1] の前半で、下の解答の  $\delta_1, \delta_2$  は一般に異なる値ですから、 $\min(\delta_1, \delta_2)$  を取るという操作が必要です。それが抜けているものは 10 点引きです。

[3] で、 $f(x) > g(x)$ ,  $f(x) = g(x)$ ,  $f(x) < g(x)$  の 3 通りに分けるというのは多くの人気が気づいていましたが、そのあとが不十分な人が大半でした。 $f(x) > g(x)$  となるような  $x$  の集合は一般にはきわめて複雑なものです。区間でも、無限個の重ならない区間の和でもありません。(同様に、 $f(x) = g(x)$  となる  $x$  の集合もきわめて複雑なものです。 $\{x_1, x_2, \dots\}$  などと書けるものではありません。) だから、「 $f(x) > g(x)$  となる部分での連続性は明らか」というような書き方は重大な飛躍です。下の解答例のようにもったときっちり書かないといけません。たとえば、「 $f(x) \geq g(x)$  のとき、 $h(x) = f(x)$ ,  $f(x) < g(x)$  のとき、 $h(x) = 0$ 」と定義した関数  $h(x)$  はもちろん一般に連続ではありません。この例とこの問題との違いがはっきりわかるような証明が必要です。

下に略解をつけます。

[1] 簡単なことですが、詳しく書きましょう。

(1)  $\Rightarrow$  (2) 任意に  $\varepsilon > 0$  を取る。この  $\varepsilon > 0$  に対して (1) を使うと、

$$\exists \delta_1 > 0, a < x < a + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon,$$

$$\exists \delta_2 > 0, a - \delta_2 < x < a \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon,$$

である。よって、 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  とおけば、

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

であるので、(2) がわかる。

(2)  $\Rightarrow$  (1) 任意に  $\varepsilon > 0$  を取る。この  $\varepsilon > 0$  に対して (2) を使うと、

$$\exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

である。この  $\delta$  を使うと、

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon,$$

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon,$$

だから、(1) の 2 つの等式が得られた。

2

[2]  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  とおく . 授業でやった Bolzano-Weierstrass の定理の証明より ,  $\alpha \in A$  である .  $\beta > \alpha$  のとき ,  $\beta$  に収束する  $\{a_n\}_n$  の部分列が存在しないことを示せば , (1), (2) が同時に証明できる . そのような部分列があったとしよう .  $\alpha < \gamma < \beta$  となる  $\gamma$  を任意に取る . 部分列が  $\beta$  に収束しているので ,  $\gamma$  より  $a_n$  が大きくなる番号  $n$  が無限個存在する . すると , すべての  $k$  について ,  $\sup_n \alpha_{n+k} > \gamma$  であるから ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \gamma$  となって , 矛盾が出た .

[3]  $a \in \mathbb{R}$  を任意に取る . 次の 3 つの場合分けによって ,  $h(x)$  が  $x = a$  で連続であることを示す .

(1)  $f(a) > g(a)$  の場合 .

$\alpha = f(a) - g(a)$  とおくと ,  $\alpha > 0$  である . 一方  $f(x) - g(x)$  は  $x = a$  で連続だから ,

$$\exists \delta_1 > 0, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \alpha/2 < f(x) - g(x) < 3\alpha/2$$

である . よって ,  $|x - a| < \delta_1$  の範囲では ,  $h(x) = f(x)$  である .

さて , 任意に  $\varepsilon > 0$  が与えられたとする .  $f(x)$  の  $x = a$  における連続性より ,

$$\exists \delta_2 > 0, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

がわかる . そこで  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  とおけば ,  $|x - a| < \delta$  のとき ,  $|h(x) - h(a)| < \varepsilon$  であるから ,  $h(x)$  は  $x = a$  で連続である .

(2)  $f(a) < g(a)$  の場合 .

(1) と全く同様である .

(3)  $f(a) = g(a)$  の場合 .

任意に  $\varepsilon > 0$  が与えられたとする .  $f(x), g(x)$  の  $x = a$  における連続性より ,

$$\exists \delta_1 > 0, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

$$\exists \delta_2 > 0, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon,$$

である . これより ,  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  とすれば ,  $|x - a| < \delta$  のとき ,  $|h(x) - h(a)| < \varepsilon$  がわかるので ,  $h(x)$  は  $x = a$  で連続である .