数学 I A (理科 I 類 17,18,27,28 組) 期末テスト

1995 年 2 月 16 日　河東泰之

この試験は自筆ノート持ち込み可で行います.（教科書などは，不可です.）時間は 90 分です.

[1] (1) 関数 $\dfrac{1}{(1-x^2)^3}$ を $x=0$ のまわりで Taylor 展開したべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を求めよ.

(2) 上のべき級数が，もとの関数 $\dfrac{1}{(1-x^2)^3}$ に等しくなるような x の範囲を求めよ.

（以上いずれも，きちんと計算の根拠を述べること．根拠が不十分，不適当な場合は答だけあっていてもかなり減点する.）

[2] 関数列 $\{f_n(x)\}_n$ は，区間 $[0,\infty)$ 上の実数値連続関数の列で，次の 2 条件を満たすとする.

(1) $\{f_n(x)\}_n$ は，区間 $[0,\infty)$ 上で定数関数 0 に一様収束している.

(2) すべての n に対し，$[0,\infty)$ 上で不等式 $|f_n(x)| \le \dfrac{1}{x^2+1}$ が成り立つ.

この時，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ は収束し，$n\to\infty$ の時に $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx \to 0$ となることを証明せよ.

[3] 次の積分（平面全体上の重積分）の値を求めよ.

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy.$$

[4] 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 \int_{2-2\sqrt{1-x}}^{2+2\sqrt{1-x}} xy^4\,dy\,dx.$$