

答案の上に数字が二つ書いてありますが、左側の数字が期末試験そのものの点数（各問 25 点，125 点満点）で、右側の点数（ で囲ってある数字）が正式のこの科目の成績（教務課に提出したもの）です。この算出法は次のとおりです（演習の成績は 1 年間の通算でつけるので、今回は何もつけていません。）

まず、学期末試験の点数を、 x_1 点，5 月 18 日の中間テストの点数を、 y_1 点，6 月 29 日の中間テストの点数を、 y_2 点とします。次に x_1 に 5 を加え、さらに 100 を越えた場合は x_1 を 100 とおき直します。そして、総合点 x を

$$x = 0.4x_1 + 0.3 \max(x_1, y_1) + 0.3 \max(x_1, y_2)$$

とおき、さらに $45 \leq x < 50$ の場合は $x = 50$ とおき直します。こうして得られた x が総合成績です（これは、4 月に宣言したものより、甘い方向に少し変わっています。）

期末試験そのものの平均点は、62.4 点，得点分布は次のとおりです。

0-19 (点)	20-39	40-59	60-79	80-99	100-124	125
5(人)	8	8	12	6	5	1

また、総合成績の平均は 67.7 点，得点分布は次のとおりです。

0-24 (点)	25-49	50-64	65-79	80-99	100
3(人)	4	12	7	12	7

[1] 答えは「(定数関数 0 に) 一様収束している」です。 $x \in [0, \infty)$ の時、 $0 \leq x/(1+nx) < 1/n$ なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、自然数 N を $N > 1/\varepsilon$ となるように取れば、 $n \geq N$ の時すべての $x \in [0, \infty)$ に対して $|0 - x/(1+nx)| < 1/n < \varepsilon$ となって、証明が終わります。

収束先の計算を間違えて、たとえば $1/x$ に収束するなど勘違いした人が結構いました。

一様連続と混同したり、また「各点収束なので、一様収束」などと誤った主張をした人もいました（これが誤りであることは、たとえば関数列 $\left\{ \frac{x^2}{1+nx} \right\}_{n=1,2,3,\dots}$ を考えればわかります。）

[2] これは、もちろん高校数学のようにやってもできますが、一番簡単なのは Taylor 展開することです。 $x = 0$ のときは明らかで、 $x > 0$ の時は、 $f(x) = (1+x)^{3/2}$ とすると、 $f'(x) = 3(1+x)^{1/2}/2$, $f''(x) = 3(1+x)^{-1/2}/4$, $f'''(x) = -3(1+x)^{-3/2}/8$ なので、Taylor の定理より、 $f(x) = 1 + 3x/2 + 3x^2/8 - (1+c)^{-3/2}x^3/16$ が成り立つような c が $0 < c < x$ の範囲に存在します。 $-x^3/16 \leq -(1+c)^{-3/2}x^3/16 \leq 0$ ですから問題の式を得ます。

あるいは、右側の不等式をこうやって示したあと、左側についてはもう1次高い Taylor 展開を使うこともできます。

Taylor 展開を有限次で止めずに、無限級数に展開した人もかなりいました。しかしこうすると、収束の問題が生じてしまいます。実際、この例では $x > 1$ で収束しなくなってしまうので、問題の $x \geq 0$ という条件に適合しなくなります。

[3] これは、 $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ の両辺を t で2回微分して、 $t = 1$ とすれば、問題の式そのものが出ます。この方法 (t で微分したあと、 $t = 1$ とおく) は、2変数の Taylor 展開のところでやったのですが、みんな忘れてしまったのか、できはよくありませんでした。

また、条件 $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ を満たす f は、 k 次の項だけからなる多項式であることを言おうとしている人が結構いましたが、これは誤りです。

[4] これは、標準的な計算問題ですが、計算ミス、極値条件の思い違いなどがたくさんありました。

まず、普通に微分していくと、

$$\begin{aligned}f_x &= (4x - 2xy^2 - 4x^3)e^{-x^2-y^2}, \\f_y &= (2y - 4x^2y - 2y^3)e^{-x^2-y^2}, \\f_{xx} &= (4 - 20x^2 + 4x^2y^2 - 2y^2 + 8x^4)e^{-x^2-y^2}, \\f_{xy} &= f_{yx} = (-12xy + 4xy^3 + 8x^3y)e^{-x^2-y^2}, \\f_{yy} &= (2 - 4x^2 - 10y^2 + 8x^2y^2 + 4y^4)e^{-x^2-y^2}\end{aligned}$$

となります。そこで、 $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ の点を探すと、 $(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ の5通りとなります。これらについて、Hessian を見れば、 $(x, y) = (0, 0)$ で、極小値 0、 $(x, y) = (\pm 1, 0)$ で、極大値 $2/e$ をとることがわかります。

まず、 $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ の点を探るところで、計算ミス、勘違いがかなりありました。また、偏微分の計算ミスもたくさんありました。

この問題は、関数がきれいな形をしているため、答えの見当は次のように簡単についてしまいます。ですから、計算ミスで違う答になった人は本来、おかしいということに気付くべきです。

まず、 $(x, y) = (0, 0)$ で $f(x, y) = 0$ 、その他の点で $f(x, y) > 0$ となるのは明らかなので、 $f(0, 0)$ が最小値です。次に $f(x, y) = (x^2 + (x^2 + y^2))e^{-x^2-y^2}$ と書いて、 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) という円周上で考えれば、明らかにこの円周上での最大値は $f(\pm r, 0) = 2r^2e^{-r^2}$ です。 $r > 0$ を動かせば、関数 $2r^2e^{-r^2}$ の最大値は $0 < r < \infty$ に一ヶ所あり、 $r = 1$ のときの $2/e$ であることはすぐにわかります。ですから結局、 $(x, y) = (0, 0)$ で、最小値 0、 $(x, y) = (\pm 1, 0)$ で、最大値 $2/e$ をとることがわかり、これ以外に極値はないことは、関数のグラフを思い浮かべれば容易に「推定」できます（「証明」にはもう少し議論がいりますが）。

このように、まずだいたいどんなグラフになるかを考えるのは重要なことです。

また, $X = x^2, Y = y^2$ において, $(2X + Y)e^{-X-Y}$ の問題に直そうとしている人が何人かいましたが, これは $x = 0$ または $y = 0$ のところで問題があるのでかなりくふうしないとうまくいきません.

5 番は証明問題なので, まず省略のない完全な証明を示します.

[5A] まず A, B はいずれも空ではないので, $a_0 \in A, b_0 \in B$ となる有理数 a_0, b_0 を取る. もちろん, $a_0 < b_0$ である. 次に $a_0 + kr/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) という形の有理数を考えると, $k = 0$ の時, A の元となり, $k \geq 2(b_0 - a_0)r$ の時, B の元となるので, ある k に対して, $a_0 + kr/2 \in A, a_0 + (k+1)r/2 \in B$ となることがわかる (厳密には, 背理法で k に関する数学的帰納法を使う.) このとき, $a = a_0 + kr/2 \in A, b = a_0 + (k+1)r/2 \in B$ とおけば $0 < b - a = r/2 < r$ である.

[5B] $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$ より, 数列 $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$ はいずれも有界である. 数列 $\{a_n\}_n$ は単調増大, 数列 $\{b_n\}_n$ は単調減少なので, それぞれ極限值 α, β を持つ.

$$\beta - \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$$

だから, $\alpha = \beta$ である. n を任意に決めたあと, $m > n$ という m 全体を考えて $a_n \leq a_m < b_m \leq b_n$ で, $m \rightarrow \infty$ とすれば, $a_n \leq \alpha = \beta \leq b_n$ を得るので, 任意の自然数 n について $\alpha \in [a_n, b_n]$ である.

次に, α' がすべての自然数 n について $\alpha' \in [a_n, b_n]$ を満たしたとすると, $a_n \leq \alpha' \leq b_n$ で, $n \rightarrow \infty$ として, $\alpha \leq \alpha' \leq \beta = \alpha$ となる. よって, すべての $[a_n, b_n]$ にふくまれる実数は α 一つだけである.

[5A] は, ほかに方針はありますが, ほとんどの答えは, だいたいできているか, まるでおかしいかの二つに一つでした.

[5B] は, まずいきなり $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$ だから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ とかいたものがたくさんありましたが, これでは論理的に飛躍しており, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ が存在することを先に示さなくてはなりません (例えば, $a_n = b_n = n$ といった数列を考えてみてください.)

また, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ としたあと, すべての n に対し, $a_n < \alpha < b_n$ と書いた人もかなりいましたが, これは $a_n \leq \alpha \leq b_n$ でないといけません. (例えば, $a_n = 0, b_n = 1/n, \alpha = 0$.)

最後の「一つだけ」存在する, という点もいいかげんな解答がけっこうありました.