

[1], [2] は定義がちゃんとわかっているかどうかの問題で、まあよくできていました。[3] は、少し難しめかも知れませんが、できている人も結構いました。平均点は、69.875 点、得点分布は次のとおりです。

0-19 (点)	20-39	40-59	60-79	89-99	100
1 (人)	3	8	7	18	3

[1] (一つ 10 点。基本的に 0 点または 10 点で付ける。) もちろんいろいろな例がありますが、簡単なもの(極端なもの)は、例えば次のとおりです。

- (1)  $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$
- (2)  $0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$  (2 番めからずっと 1.)
- (3)  $a_n = n$ .
- (4)  $0, 1, -1, 0, 2, -2, 0, 3, -3, 0, 4, -4, \dots$

[2] (40 点)

$$\begin{aligned} \left| \frac{3n^2 - 5n + 4}{n^2 + 1} - 3 \right| &= \frac{5n - 1}{n^2 + 1} \\ &\leq \frac{5n}{n^2} \\ &= \frac{5}{n} \end{aligned}$$

だから、与えられた  $\varepsilon > 0$  に対し、自然数  $N$  を  $N > \frac{5}{\varepsilon}$  となるように取れば、 $n \geq N$  の時、

$$\left| \frac{3n^2 - 5n + 4}{n^2 + 1} - 3 \right| \leq \varepsilon$$

が成り立つことになります。

[3] (20 点) 例えば、

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \dots$$

といった並べ方が考えられます(分母は、2 のべきのほかにも、10 のべきとか、2, 3, 4, 5, ... と並べた人もいました。)

ほかの種類のお答えとしては、 $\sqrt{2}n$  の小数部を取る、 $\sin^2 n$ ,  $|\sin n|$ ,  $\frac{1 + \sin n}{2}$  などがありました。これらはいずれも正しい答えですが、これらが本当に問題の条件を満たすことを示すのはそんなに簡単ではありません。これらに共通して必要なのは、次の命題です。

「無理数  $\alpha$  を一つ決める。この時、 $0 \leq x \leq 1$  となる任意の実数  $x$  と任意の正の数  $\varepsilon$  に対し、自然数  $n$  が、 $|x - (n\alpha - [n\alpha])| < \varepsilon$  となるように存在する(ただし、 $[ ]$  はガウス記号。)

そこで、これにヒントをつけて、演習問題の [18] とします(演習の問題 [16] もこれに帰着する問題です。)