

2008 年度数学 I 演習小テスト (2)

2008 年 4 月 21 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

このテストは、ノート、本、コピーなどすべて持ち込み可で行います。途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1] 次のそれぞれの命題について、否定した命題を書け。 \forall, \exists などの記号を用いず、日本語で書け。二重の意味に取れるような文章を書かないよう注意すること。

(1) すべての正の実数 x, y に対し、 $(x + y)/2 \geq \sqrt{xy}$ が成り立つ。

(2) 3 以上の任意の自然数 n について、自然数 x, y, z で $x^n + y^n = z^n$ を満たすものは存在しない。

(3) 任意の有理数 p, q に対し、 $p \neq q$ ならば、 $p < r < q$ となる有理数 r が存在する。

[2] 次のそれぞれの命題について、正しいかどうかを理由をつけて答えよ。ただし、 \mathbf{R} は実数全体の集合を表す。

(1) $\forall x \in \mathbf{R} (x > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbf{R} x = e^y)$.

(2) $\forall a \in \mathbf{R} \forall b \in \mathbf{R} \forall c \in \mathbf{R} \exists x \in \mathbf{R} x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

(3) $\forall a \in \mathbf{R} \forall b \in \mathbf{R} \exists c \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R} |a \sin x + b \cos x| \leq c$.

[3] 実数の集合 A に対し、ある実数 a が存在して、任意の $x \in A$ に対して $x \leq a$ が成り立つとき、 a は A の上界であるという。

(1) 上界が一つも存在しないような集合 A の例をあげよ。

(2) 上界がちょうど一つだけ存在するような集合 A は存在するか。理由をつけて答えよ。

(3) A が空集合であるとき、 A の上界となりうる実数 a をすべて求めよ。

[4] $2^{\sqrt{2}}$ はどのように定義されたものか。説明せよ。