2008 年度数学 I 期末テスト

2009 年 2 月 13 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

このテストは，ノート，本，コピーなどすべて持ち込み可で行います．途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください．電卓等は使用禁止です．

[1] (1) $f(x) = \log \dfrac{1+x^3}{1-x^3}$ を $x=0$ の周りで Taylor 展開して得られる整級数を求めよ．

(2) (1) の整級数の収束半径を求めよ．

[2] 次の重積分の値を求めよ．

$$\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

ただし，$D = \{(x,y) \mid a^2x^2 + b^2y^2 \le 1\}$, $a>0$, $b>0$ である．

[3] (1) $t>0$ に対し，

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$$

とおく．この広義積分が収束することを示せ．

(2) 上の $f(t)$ は微分可能であることを示せ．

(3) 上の $f(t)$ に対し，$\sqrt{t}(f(t)-f'(t))$ を求めよ．

[4] 平面上のすべての点 (x,y) で定義された C^∞-関数 $f(x,y)$ で次のすべての条件を満たすものの例を一つ挙げよ．条件を満たしていることの根拠をきちんと示すこと．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ となる点は無限個ある．

(2) (1) の点のそれぞれは，極値，鞍点のいずれかである．

(3) 極大値を取る点，極小値を取る点，鞍点のいずれも無限個ずつ持つ．

[5] 次のそれぞれの関数について極値をすべて求めよ．

(1) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$.

(2) $f(x,y) = xy(x^2+y^2-1)$.