2008 年度数学 I 演習小テスト (11) 解答解説

2008 年 12 月 22 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] 20 点，[2] 30 点，[3] 30 点，[4] 10 点 ×2 です．平均点は 71.6 点，最高点は 100 点 (8 人) でした．解答例を下につけます．

[1] 積分記号下の微分を繰り返すことにより，$F'(x) = \displaystyle\int_{-x}^{0} 2(x+t)f(t)\,dt$, $F''(x) = \displaystyle\int_{-x}^{0} 2f(t)\,dt$, $F'''(x) = 2f(-x)$ を得る．よって，$F'''(0) = 2f(0)$ である．

[2] $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ の両辺を x で微分すると，$\dfrac{2}{3}x^{-1/3} + \dfrac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0$ となるので，$y' = -x^{-1/3}y^{1/3}$ である．これより，

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}} = x^{-1/3}$$

となる．これを積分して，求める長さは

$$\int_0^1 x^{-1/3}\,dx = \left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

である．

[3] x, y の条件は $x^2+y^2 \le 1$ であり．極座標を使うと，z の条件は $0 \le z \le 1-r^2$ なので，求める体積は

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

となる．

[4] (1) 求める積分を I とおくと，部分積分を 2 回行って，I は

$$[e^{-tx}\sin x]_0^\infty + t\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx = t[-e^{-tx}\cos x]_0^\infty - t^2\int_0^\infty e^{-tx}\cos x\,dx = t - t^2 I$$

に等しい．これより，$I = \dfrac{t}{t^2+1}$ である．

(2) (1) の結果を両辺 t で n 階微分を取る．ここで t が区間 $[a,b]$ を動くとき，$|x^n e^{-tx}\cos x| \le x^n e^{-ax}$ であり，$x^n e^{-ax}$ は，$[0,\infty)$ 上で広義積分可能である．よって，何回でも積分記号下の微分ができて，

$$\int_0^\infty (-x)^n e^{-tx}\cos x\,dx = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$$

である．これより，$0 < t < 1$ における Taylor 展開を使って

$$\int_0^\infty x^n e^{-tx} \cos x \, dx = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}(t - t^3 + t^5 - t^7 + \cdots)$$

となる．整級数を項別微分して $t \to 0$ とすることにより，

$$\int_0^\infty x^n e^{-tx} \cos x \, dx = \begin{cases} 0, & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{m+1}(2m+1)!, & (n = 2m+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を得る．ただしここで m は整数である．