共形場理論の数学

河東泰之 (Yasuyuki Kawahigashi)

東大数理

2012 年 6 月 17 日，理研

そもそも数理物理とは何を指すのか．本来,「物理」の部分が本体の名詞であり,「数理」はそれにかかる形容詞であるから，数学的手法を用いて，物理的結論 (何とか粒子の質量を予言するとか) を導くべきであろうが，そういうことを研究している数学者は非常に少ない．

実際に私を含めた多くの数学者がしているのは，物理的から来る問題設定，アイディア，技術などを用いた，数学的に興味深いと思われる理論，問題の数学的研究である．

今日の話もその一つであり，共形場理論に関連して生じる数学的問題のうち，ヒルベルト空間の上の作用素 (演算子) のなす無限次元の代数構造に関連した問題を取り上げる．

もっと幾何学的なアプローチもいろいろあるが，そちらとの関係はあまりよくわかっておらず，今日は取り上げない．

代数構造とはたとえば，群，環，体，リー環などのことである．これらがしばしば何らかの対象の対称性を表しているということは広く知られているであろう．

一番わかりやすいのは群の場合であり，特に，有限群が物質の離散的な対称性を表しているとか，リー群がさまざまな理論の対称性を支配しているということはわかりやすい．量子群もこの種のものの最新版の一つである．

一方，数学的立場から言えば，リー群とリー環の対応関係を明らかにするとか，有限単純群を分類するとか，コンパクト・リー群を分類するとか言ったことが，興味深い問題である．こういった問題意識やその手法が物理に影響されたことも，またその結果が物理に役に立ってきたことも，いずれもこれまでたくさん起きてきた．

純粋に数学的な立場から言えば群論の源はガロア理論である．これは n 次方程式の解の公式の問題から生じたものであり，本来群論のような代数構造とは別の問題に見える．

また,「3 以上の素数が 2 個の平方数の和で表されるための必要十分条件は 4 を法として 1 に合同であることである」というフェルマーの古典的定理は，素数一つ一つに対する主張だが，しかるべき代数構造を考えることによって証明が得られる．

このように，純粋に数学的な立場からも，群やその他の代数構造それ自体を研究することは，見かけよりずっと大きな応用範囲を持つことが少なくない．

このような研究は現在も続いており，例えば与えられた有限群を有理数体上のガロア群として実現せよ (ガロアの逆問題) という素朴な問題さえも，現在でも未解決である．

さてそこで，代数構造を研究する際に有力な数学的手法が表現論である．たとえば，リー群 $\mathbf{SU(2)}$ は，最初から $\mathbf{2 \times 2}$ 行列の集合なので，$\mathbb{C}^{\mathbf{2}}$ に自然に作用しているが，他の複素ベクトル空間への作用 (表現) を調べることが重要かつ有効である．

また，有限群の場合も，おおもとはなんらかの置換として与えられていた場合が多いので，置換行列として，ベクトル空間に作用するが，他の作用もまとめて全体として考えることも重要であり，特に有限群のユニタリ表現論は，きわめて基本的，古典的な重要性を持っている．

このように，何らかの代数構造が，(ベクトル) 空間に作用する様子を調べることが表現論の一般的テーマであり，今日の話でも重要な役割を果たす．

さて，これらの前置きの後，場の量子論の話に移る．その数学的側面のごく一部を極端に簡単化したものを述べる．

古典的な場というのは，数学的にはとにかく，時空の上の何らかの関数である．量子力学では，物理量は数ではなく作用素で表されるのであるから，時空上の作用素値関数を考えればよいであろう．しかし実は，δ-関数のようなものがいるので，時空上の作用素値超関数を考える必要がある．

超関数の理論では，試験関数と呼ばれるよい関数に数を対応させる写像そのものを超関数と思う．返す値を，作用素にすれば，作用素値超関数が考えられる．

そこで，時空，その対称性を表す群，その群の状態空間への射影的ユニタリ表現，状態空間の上の作用素に値を持つ超関数の族を考え，ワイトマンの公理系と呼ばれるものを課す．

さて，上の設定はどの時空でも意味を持つが，ここでは2次元ミンコフスキー空間 $\{(x,t)\}$ をまず考える．

これを $\{t=x\}$ と $\{t=-x\}$ の直積に分解して，あとからまた合わせる方法が知られている．そこでこの片方，すなわち単なる直線を考え，無限遠点を添加して，円周 S^1 を考える．1次元だけになってしまったが，これが時空にあたるものである．

次に時空対称性の群として，円周の向きを保つ微分同相写像全体 $\mathrm{Diff}(S^1)$ を考える．これは無限次元リー群であり，高い対称性を表している．

そこで次に，S^1 上の作用素値超関数たちを考える．これらの作用素は真空ベクトルを持つ状態空間 (ヒルベルト空間) に作用し，$\mathrm{Diff}(S^1)$ もここに作用する．この設定で，ワイトマン公理系の対応物を考えたものが，カイラル共形場理論である．

さてここでひとまず，話題を大きく変える．

有限単純群の分類理論というものがあり，完全な分類リストが得られている．そのなかには，素数位数の巡回群，5 次以上の交代群，16 系列の有限体上の行列群のほかに，26 個の例外型の群が含まれており，これで全部である．その 26 個の中でサイズが最大のものが，モンスターと呼ばれており，サイズは約 $\mathbf{8 \times 10^{53}}$ である．1970 年代に発見された．これは有限群なので，既約ユニタリ表現は有限個しかなく，自明表現の次に低い次元は 196883 である．

これとは全く無関係に，古典的なモジュラー関数，特に j-関数と呼ばれるものが 19 世紀から知られていた．これが，モンスターと関係しているというムーンシャイン予想が 1970 年代に，コンウェイ・ノートンによって提出され，ボーチャーズによって解決された．これがカイラル共形場理論の一つの数学的表現を与えている．

上半平面の複素数 τ に対し，$q = \exp(2\pi i\tau)$ とおくと，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対し，$j(\tau) = j\left(\dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$ という不変性を満たす j-関数

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots$$

というものが古くから知られている．これは無限級数だが，q^{-1} から始まることにして，上記の不変性条件を要求すれば，定数項以外の係数はすべて一意的に定まる．

マッカイは，前ページの既約表現の次元 196883 と上の係数 196884 がごく近いことに気が付いた．これをもとに精密に数学的な予想の形にしたものがムーンシャイン予想である．

ムーンシャイン予想は，何か未知の無限次元代数構造があり，その自己同型群がちょうどモンスター群であること，その無限次元代数から自然な方法で得られる，キャラクターと呼ばれる無限級数が j-関数であること，さらにほかにもたくさん自然に出てくる無限級数もすべて古典的によく知られた，たちのよい性質のものであることを主張している．

この「未知の無限次元代数構造」が頂点作用素代数と呼ばれるもので，カイラル共形場理論の一つの数学的な公理化と考えられる．すなわち一つの頂点作用素代数が，一つのカイラル共形場理論を表していると考える．(これはとても複雑な代数構造である．)

頂点作用素代数の具体例は，ユークリッド空間内の格子や，カッツ・ムーディー・リー環，ビラソロ代数などから作られる．

もう一つの共形場理論の公理化に，ヒルベルト空間の上の作用素に基づく局所共形ネットと呼ばれるものがあり，私はこちらを研究している．そのためまず作用素環の説明から始めよう．

ヒルベルト空間上のすべての有界線形作用素は，和と積があるので環と呼ばれる代数構造をなす．また，共役作用素 A^* を取る操作もある．($A^\dagger$ とも書かれる．)

このうち，和，積，スカラー倍，共役演算で閉じており，しかるべき極限操作で閉じている部分集合を考える．これが作用素環であり，考える極限操作の種類により，C^*-環，フォン・ノイマン環の 2 種類があるが，今はあまり違いは気にしなくてよい．

作用素は積が非可換だということが重要な性質だが，たまたま作用素環が可換になる場合は適当な空間上の関数環とみなせるので，一般の作用素環は「非可換な空間」を表していると考える．

作用素環の立場からみた，カイラル共形場理論の公理化を述べよう．作用素値超関数を,「時空」S^1 内の円弧 I に台を持つ試験関数に適用すれば，I での観測可能量を表す作用素が得られると考えられる．このような作用素の生成する作用素環を考える．これによって I ごとに定まる作用素環の族が，場の量子論を記述すると考える．

そこで，円弧 I ごとに定まる作用素環 $A(I)$ の族を考え，次の公理を要求する．これが局所共形ネットと呼ばれる対象である．

1. $I_1 \subset I_2 \Rightarrow A(I_1) \subset A(I_2)$.
2. $I_1 \cap I_2 = \varnothing \Rightarrow [A(I_1), A(I_2)] = 0$. (局所性公理)
3. $\mathrm{Diff}(S^1)$-共変性 (共形共変性)
4. 正エネルギー条件
5. 真空ベクトル

一例として，ビラソロ・ネットの作り方を述べる．無限次元リー群 $\mathbf{Diff}(S^1)$ は対応する無限次元リー環を持ち，その複素化の中心拡大がビラソロ代数である．セントラル・チャージと呼ばれる中心的な元 c と可算個の生成元 $\{L_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で生成され，関係式は次のとおりである．

$$[L_m, L_n] \;=\; (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c.$$

このリー環の真空表現と呼ばれるものを取ると，各 L_n はヒルベルト空間上の作用素に移り，c は正の実数に移る．このとき，z を絶対値 1 の複素数とすると，$L(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ は，ストレス・エネルギー・テンソルと呼ばれる，S^1 上の作用素値超関数のフーリエ級数展開とみなせる．これからビラソロ・ネットが作れる．$c = 1/2$ のときがイジング・モデルに対応する．

局所共形ネットが我々の調べたい代数構造である．一般に表現論が代数構造の研究に有効なのであった．今，各 $A(I)$ は共通のヒルベルト空間にもとから作用しているが，別のヒルベルト空間への表現を考えることもでき，次のような概念がうまく定義できる．

1. 表現のテンソル積 (DHR 理論)
2. 表現の次元 (値は 1 以上 ∞ 以下の実数) (ジョーンズ指数)
3. 既約表現，一般の表現の既約分解

時には，既約表現が有限個しかなく，すべて有限次元を持つという状況が起こる．有限群や，1 のべき根における量子群の表現論に似た状況であり，また共形場理論の有理性ともほぼ同じである．

我々は，ロンゴ，ミューガーと共に，この状況を完全有理性と名付け，作用素環的な特徴づけを与えた．

通常の群の表現論では，$\boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{G}$ の時，部分群 $\boldsymbol{H}$ の表現から誘導表現の手法によって $\boldsymbol{G}$ の表現が作れる．この類似をしたい．

すなわち，局所共形ネットの包含関係 $\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}) \subset \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I})\}$ と $\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I})\}$ の表現が与えられた時に，$\{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I})\}$ の表現を作りたい．実は，表現そのものは一般にうまく作れないのだが,「ほとんど表現に近いもの」が作れる．これはロンゴ，レーレンら何人かの人によって独立に違う状況で導入され，我々がベッケンハウアー，エバンスと共に，統一的な理論を与えた．$\boldsymbol{\alpha}$-誘導表現と呼ばれている．

この $\boldsymbol{\alpha}$-誘導表現の構成には，実は組紐構造が必要であり，$\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I})\}$ の表現論が自動的に組紐構造を持つことは知られていた．この構成と，モジュラー不変行列との関係も我々によって明らかになった．2次元の共形場理論ではなく，カイラル共形場理論から自然にモジュラー不変行列が生じるのである．

局所共形ネットは，ビラソロ代数の表現を導き，セントラルチャージ c は正の実数に移る．このとき $c=1$ などと書く．可能な値は，$\{1-6/m(m+1) \mid m=3,4,\dots\} \cup [1,\infty)$ であることが知られている．これは局所共形ネットが決める数字である．

$c<1$ の場合は，局所共形ネットはビラソロネットの拡大であり，ビラソロネットは完全有理的であり，その表現論も詳しくわかっている．そこで一般の $c<1$ を満たす局所共形ネットは，α-誘導表現とモジュラー不変行列の結果によって，完全に分類される．

我々がロンゴと得た完全分類リストは，A_n-D_{2n}-$E_{6,8}$ 型のディンキン図形のペアでラベルづけられ，2 つの無限系列と，4 つの例外が生じる．4 つのうち 3 つは，コセット構成法によるものと解釈できるが，残りの 1 つはこれまで作用素環を用いてしか構成されていない，新しいカイラル共形場理論の例である．

さてここで，また違う方向に話を転換する．向きづけられた，n 次元コンパクト・リーマン多様体とその上のラプラシアン Δ を考える．このとき，$t \to 0$ でワイルの古典的な漸近表式

$$\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta}) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}(a_0 + a_1 t + \cdots),$$

がなりたち，係数は幾何学的意味を持つ．

一方，局所共形ネットでは，L_0 が特別なもので共形ハミルトニアンと呼ばれる．知られているすべての良い例で，$t \to 0$ の際の漸近展開

$$\log \mathrm{Tr}(e^{-tL_0}) \sim \frac{1}{t}(a_0 + a_1 t + \cdots),$$

が得られており，我々はロンゴと係数の一部を決定した．

つまりラプラシアンと共形ハミルトニアンの間には形式的類似がある．そして，前者の “平方根” がディラック作用素である．

非可換な作用素環を「非可換な空間」と思いたいのであった．しかし，通常の可換な作用素環から生じる空間は，測度空間や，コンパクト・ハウスドルフ空間であり，幾何学と呼ぶには構造が少し足りない．これを補うのが，コンヌの非可換幾何学である．

コンヌは「非可換多様体」を考えるには，あとはディラック作用素があればよいと考えた．これを公理化したものが，次のスペクトラル・トリプルで，非可換多様体にあたるものである．

スペクトラル・トリプル $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{D})$ は次のものからなる．

1. $\boldsymbol{H}$: ヒルベルト空間．$\boldsymbol{L}^2$-スピナーの空間に当たる．
2. $\boldsymbol{\mathcal{A}}$: $\boldsymbol{H}$ 上の作用素のなす環．多様体上の $\boldsymbol{C}^\infty$ 関数環に当たる．
3. $\boldsymbol{D}$: $\boldsymbol{H}$ 上の自己共役作用素でレゾルベントがコンパクトなもの．ディラック作用素に当たる．
4. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ に対し，$[\boldsymbol{D}, \boldsymbol{x}]$ が有界である．(微分可能性)

これまでやってきたことと，非可換幾何を結びつけるにはディラック作用素が必要である．ラプラシアンと共形ハミルトニアンが似ていて，ラプラシアンの “平方根” がディラック作用素なのであるから，共形ハミルトニアンのしかるべき平方根を探したい．

そのようなものはすでに知られており，ビラソロ代数に，L_0 の平方根に当たるものを追加したものは，2 つある $N = 1$ 超ビラソロ代数のうちの片方，ラモンド代数である．関係式は今書かないが，可算個の生成元と関係式から決まる超リー代数である．

これを使って「無限次元非可換多様体の族」を超共形場理論から作用素環的に作ることができる．さらに拡大された $N = 2$ 超ビラソロ代数があり，これを使うと，非可換幾何学でのコホモロジー的不変量が計算できる例が作れ，さらに深い関係が見える．これは，カルピ，ヒリエ，ロンゴ，シューと我々の最近の結果である．

さて今まで，カイラルな共形場理論の作用素環的扱いについて述べてきた．これはもともと 2 次元ミンコフスキー空間を $\{x = \pm t\}$ の直積に分解したところから発生したのであった．

2 次元ミンコフスキー空間全体の上の理論も同様に，作用素環の族としてフォーミュレートでき，2 つのカイラルな局所共形ネットから作る方法が知られている．ロンゴと共に分類理論もできている．ここではモジュラー不変行列がよく知られた形で登場する．

さらに 2 次元ミンコフスキー空間の半分 $\{(x,t) \mid x > 0\}$ で考える境界的共形場理論も形式的には全く同様に扱える．こちらでも，ロンゴ，レーレンらと分類理論ができており，さらに，境界的共形場理論の境界を取り除く話 (ロンゴ，レーレン) や，逆に境界を新たに作る話 (我々とカルピ，ロンゴ) などもごく最近進展している．

これからの研究テーマ

頂点作用素代数と局所共形ネットは同じ対象を記述する代数構造なので，何か直接的対応があるはずである．ムーンシャインの例をはじめとして，個別の翻訳には成功しているが，最終的には，リー環とリー群の対応のようなものが期待される．(とても難しい．)

そのような対応の際には，双方で何かよい追加条件が必要なはずで，頂点作用素代数の方では，C_2 有限性とユニタリ性，局所共形ネットの方では完全有理性と思われる．

統計力学のスケーリング・リミットとの関係もよくわからない．

より幾何学的なアプローチとの関係はほとんどわかっていない．例えば，Riemann 面上でどうするか，という問題もわからない．また，ミラー・シンメトリーも作用素環的にとらえられるはずだが，ごく形式的でつまらないことしかわかっていない．