数理科学 II 期末テスト

2005 年 7 月 25 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

このテストは，ノート，本，コピーなどすべて持ち込み可で行います．途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください．(多少欄外にはみ出してもかまいません．)

[1] 次のそれぞれの微分方程式を解け．解が本当にそれだけである理由をきちんと説明すること．(解の一意性に関する一般論を適用する場合は，何をどのように適用したかを述べること．)

(1) $y' = \dfrac{-2xy}{x^2+1}$.

(2) $y''' - 3y'' + 4y = 4x^2 - 6, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = 3.$

(3) $x^2y' - 3xy = -4, \quad y(1) = 0$. 範囲は $x > 0$.

[2] 微分方程式

$$y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + c_1y' + c_0y = 0$$

を考える．ただしここで，n は 1 以上の整数，$c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0$ はすべて実数の定数である．この形の微分方程式で，$y = x\cos x$ を解に持つようなものの中で，n が最も小さいものを求めよ．

[3] 微分方程式

$$y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + c_1y' + c_0y = f(x)$$

を考える．ただしここで，n は 1 以上の整数，$c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0$ はすべて実数の定数，$f(x)$ は実数全体で定義された実数値の連続関数である．この形の微分方程式で，$y = e^{2x} + e^{3x}$ と $y = e^{-x} + e^{3x}$ を解に持つようなものの中で，n が最も小さいものを求めよ．

[4] 微分方程式 $(x^2 - y^2)y' = 2xy$ を考える．この方程式の初期値 (x_0, y_0) で，その点を通るような解が一つもないものをすべて求めよ．

[5] a, b を実数とし，微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ に対し，次の V を考える．

$$V = \{y \mid y \text{ は実数値を取る，上の微分方程式の解で } \lim_{x\to\infty} y(x) = 0\}.$$

この V は実数係数のベクトル空間であるが，その次元が 1 であるための必要十分条件を，a, b で表せ．