数理科学 II 中間テスト (1) 解答解説

2005 年 5 月 30 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

平均点は 52.9 点，最高点は 80 点でした．これは成績に関係ないのでそのままつけてありますが，期末テスト等では，配点などで配慮してもう少し点が出るようにします.

[1] 各問 5 点.
(1) $\cos x + i\sin x$.
(2) $-1/2$.
(3) $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots$.
(4) π.

[2] 各問 15 点.
(1) 右辺の $-y/x$ はこのままでも y で偏微分しても連続なので，解の存在と一意性が保証される．このことと，定数関数 $y=0$ が解でることより，他の解は値 0 を取らない．よってその場合は，変数分離で，$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$ となる．これを解いて，$y=0$ もあわせて，$y=c/x$ (c は定数) となる.
(2) 同次形である．$y=ux$ とおいて，$y' = u'x + u = \dfrac{y^2-x^2}{2xy} = \dfrac{u^2-1}{2u}$ となる．$\displaystyle\int \frac{2u}{u^2+1}du = -\int \frac{dx}{x}$ より，$\dfrac{y^2+x^2}{x^2} = \dfrac{2c}{x}$ (c は 0 でない定数) となる．つまり，$(x-c)^2+y^2=c^2$ (c は 0 でない定数，$y\neq 0$) を得る.
(3) $x\neq 0$ の範囲では $y'=2y/x$ と書けて，右辺はこのままでも y で偏微分しても連続なので，解の存在と一意性が保証される．定数関数 $y=0$ は解であり，その他の解は値 0 を取らない．変数分離形として解くと $y=cx^2$ (c は定数) となるが，これは $x\neq 0$ での解である．$x>0$ と $x<0$ で違う c であっても $x=0$ では微分可能につながっていて，微分方程式を満たしている.
(4) 1 階線型常微分方程式である．斉次方程式 $y'-x^2y=0$ の解は $c\exp(x^3/3)$ (c は定数) である．また，$y=x$ が $y'-x^2y+x^3-1=0$ を満たしているので，1 階線型常微分方程式の一般論より，一般解は $c\exp(x^3/3)+x$ (c は定数) である.

[3] 配点は 20 点.
$x\neq n\pi$ (n は整数) では両辺を $\sin x$ で割ることができる．すると，変数分離形の微分方程式 $y' = \dfrac{y\cos x}{\sin x}$ を得る．右辺はこのままでも y で偏微分しても連続なので，解の存在と一意性が保証される．定数関数 $y=0$ は解であり，その他の解は値 0 を取らない．これより，$x\neq n\pi$ (n は整数) では $y=c\sin x$ (c は定数) となる．$x=n\pi$ (n は整数) の点を通る解があれば，$y=c\sin x$ と連続につながらなくてはならない．これより，$x=n\pi$ (n は整数) かつ $y=0$ ならば O.K. だが，その他の y の値ではダメである．よって，$x=n\pi, y\neq 0$ (n は整数) である.