数理科学 II 中間テスト (1) 解答・解説

2003 年 5 月 27 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

平均点は 57.6 点でした．点数分布は次のとおりです．ふだんは，配点や採点基準を調節して，平均が 70 点くらいになるようにするのですが，今回は成績に関係ないのでそのような調節はしませんでした．成績に関係ある試験の場合は，今回の採点よりプラス 10 点くらいになると思います．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
33(人)	17	14	13	15	6	0

簡単な解説をつけます．

[1] (5 点 ×4) これは答えだけ書きますが以下のとおりです．特に (1), (2) くらいは忘れてもらっては困るんですが...

(1) $\cos x + i \sin x$.

(2) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$.

(3) 1.

(4) $1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + 5x^8 - \cdots$.

[2] (20 点) これもよくあるものです．たとえば次のものが答えです．

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

[3] (10 点 ×3) いずれも解の存在と一意性が使える形になっています．

(1) 普通に変数分離型なので，$y = \dfrac{-1}{x+c}$ (c は実数の定数) または，$y = 0$.

(2) 普通に変数分離型なので $y = \tan(x + c)$ (c は実数の定数).

(3) $x > 0$ なので $u = y/x$ とおけて，このとき $\dfrac{du}{dx} x = u \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ である．あとは普通に解いて，$x^2 + c^2 = (y + c)^2$ (c は実数の定数) または，$y = 0$.

[4] (30 点) $y \neq 0$ では解の存在と一意性が使える形であり，$y = (x - c)^3/27$ を得る．あとは，次のように場合わけする．

(1) 常に $y = 0$ の場合．

(2) y は正の値を取るが負の値をとらない場合．

(3) y は負の値を取るが正の値をとらない場合．

(4) y は正の値も負の値もをとる場合．

これに対応して以下の 4 通りの解があり，これらがすべてである．

(1) $y = 0$ (定数関数).

(2) 正の値をとる点では解の一意性が使えて，そこから解が連続につながっているので，ある実数の定数 c に対し，$y = (x-c)^3/27$ の形の解を $x \geqq c$ で得る．$x < c$ で正の値を取る点があると，$x \geqq c$ での解の一意性に反することがわかるので，結局 $x < c$ では常に $y = 0$ となり，解は次のとおりである．$y = \begin{cases} (x-c)^3/27, & x \geqq c \text{ の時} \\ 0, & x < c \text{ の時.} \end{cases}$

(3) (2) と同様に考えて，次の解を得る．

ある実数の定数 c に対し，$y = \begin{cases} (x-c)^3/27, & x \leqq c \text{ の時} \\ 0, & x > c \text{ の時.} \end{cases}$

(4) まず，(2) のように考えて，あとは負の値を取る点についても (3) のように考えればよい．解は次のとおりである．ある実数の定数 c_1, c_2 で $c_1 \leqq c_2$ となるものに対し，

$$y = \begin{cases} (x-c_1)^3/27, & x \leqq c_1 \text{ の時} \\ 0, & c_1 < x < c_2 \text{ の時} \\ (x-c_2)^3/27, & x \geqq c_2 \text{ の時.} \end{cases}$$

($c_1 = c_2$ ならば右辺の三つのケースのうち二番目は起こらない．)