2002 年度全学ゼミナール演習問題

2002 年 6 月 5 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

これらは自分で理解を深めるための問題です．別にレポートにするとか，前で解くとかいったものではありません．

[1] (1) 無限大超実数全体の集合は，internal ではないことを示せ．
(2) 無限小超実数全体の集合は，internal ではないことを示せ．

[2] 以下のことを示せ．
超実数を係数とする超自然数次の $*$ 多項式を考えると，これは，超複素数を根とする 1 次式の $*$ 有限積に分解される．

[3] x が普通の実数であって，かつ，超有理数であれば，普通の有理数であることを示せ．

[4] Bolzano-Weierstrass の定理,「有界実数列は集積点を持つ」を，non-standard analysis を用いて証明せよ．(ヒント: 前回の問題 [6] を使う．)

[5] 任意の超実数について，それに無限に近い超有理数が存在することを示せ．

[6] 次の定理を non-standard analysis を用いて証明せよ．
$f(x)$ は実数上で定義された実数値関数で，任意の実数 x, y に対し $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすとする．$f(x)$ が，ある空でない開区間上で有界ならば，$f(x) = f(1)x$ である．
ここで，$f(x)$ の連続性は仮定されていないことに注意せよ．ヒントとして次の方針を挙げる．
(1) 任意の超有理数 ρ に対して，$f(\rho) = f(1)\rho$ であることを示す．
(2) 任意の無限小超実数 ε に対して，$f(\varepsilon)$ も無限小であることを示す．
(3) 任意の実数に対し，上の [5] を使う．

[7] 実数の有界数列 (a_n) に対し，実数を対応させる写像 LIM が次の条件を満たすとき，Banach (バナッハ) 極限と呼ぶ．
(1) $a_n \geq 0$ ならば，$\mathrm{LIM}(a_n) \geq 0$.
(2) $\mathrm{LIM}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \mathrm{LIM}(a_n) + \beta \mathrm{LIM}(b_n)$.
(3) $\limsup_n a_n \geq \mathrm{LIM}(a_n) \geq \liminf_n a_n$.
(4) $\mathrm{LIM}(a_{n+1}) = \mathrm{LIM}(a_n)$. ただし，ここで数列 (a_{n+1}) は，$a_2, a_3, a_4, \ldots$ という数列のことである．
Non-standard analysis を用いて，Banach 極限が存在することを示せ．