2002 年度全学ゼミナール演習問題

2002 年 5 月 1 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

これらは自分で理解を深めるための問題です．別にレポートにするとか，前で解くとかいったものではありません．

[1] 次の事を示せ．これらはいずれも授業中に「簡単にできる」と言ったことである．

(1) 有限超実数 α に対し，

$$A = \{a \mid a \text{ は実数で } a < \alpha\}$$

とおく．$a_0 = \sup A$ とすると，α は a_0 に無限に近い．

(2) α, β が無限小超実数ならば $\alpha + \beta$ も無限小超実数である．

(3) 超実数 α に対し，α が無限小であるための必要十分条件は $|\alpha|$ が無限小であることである．

(4) I を実数の区間，$f(x)$ を I 上で定義された実数値関数とする．$f(x)$ が $x = a \in I$ で連続であるための必要十分条件は，任意の超実数 $\alpha \in {}^*I$ について α が a に無限に近ければ $f(\alpha)$ が $f(a)$ に無限に近いことである．

(5) a, b を $a < b$ であるような実数とし，$I = [a, b]$ とする．$\alpha \in {}^*I$ を取って α の standard part を c とする．このとき，$c \in I$ である．

[2] (a_n) を実数列とする．$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ であるための必要十分条件は，すべての無限大超自然数 ω にたいして a_ω が正の無限大超実数になることであること示せ．

[3] α を 0 でない超実数とする．$|\alpha|$ が無限大であることの必要十分条件は $1/\alpha$ が無限小である．この事を示せ．

[4] (a_n), (b_n) は実数列で，それぞれ実数 a, b に収束するとする．このとき，超準解析を使って以下のことを示せ．

(1) 実数列 $(a_n b_n)$ は ab に収束する．

(2) $a \neq 0$ とすると，十分大きい n について実数列 (b_n/a_n) を考えることができ，その収束先は b/a である．

[5] 超自然数 α, β に対し最大公約数が存在することを示せ．(超自然数に対し，約数の概念が定義され，二つの超自然数に対しては，その共通の約数であるような超自然数たちの中で最大のものが存在することを示せ，という意味である．)

[6] (a_n) を実数の有界列とする．実数 a について下の 2 条件が同値であることを示せ．

(1) ある無限大超自然数 ω に対し，a_ω が a に無限に近い．

(2) (a_n) の部分列で a に収束するものがある．

[7] $\sin x$ の $x = 0$ における Taylor 展開を n 次で切った多項式を $f_n(x)$ とおく．(n は自然数である．) α を有限超実数，ω を無限大超自然数としたとき，$f_\omega(\alpha)$ が無限小であったとする．このとき，α の standard part について何が言えるか．