# Subfactor 理論とその応用
# — 作用素環と場の量子論 —

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

2002 年 3 月

## 1 前置き

私の専門は subfactor 理論，特に最近は，場の量子論への作用素環論的アプローチに現れる数学的問題の研究である．しかし，多くの方はおそらく，作用素環論の結果というものにほとんど，あるいはまったくなじみがないのではないかと思う．そこでいい機会であると思うのでまず，作用素環論とは何を，どのような方法で研究しているのかについて私の考えを説明するところから始めたい．その後で，私のしてきた，あるいはしている研究について述べる．テクニカルなことにはまったく触れないので，以下，正確な定義や定理のステートメントは一つも出て来ない．

## 2 作用素環論の目指すもの

作用素環論と他分野との関係については Connes の非可換幾何学や，Jones 多項式に始まる 3 次元トポロジーの不変量が有名である．特に後者については私の研究とも密接に関連しているので，私も話したり書いたりしたことがたくさんあるが，こういった応用は，作用素環論内部の目的意識と直接関係しているわけではない．そこでまず，ほかの分野との関連は後回しにして，作用素環論内部において何をしたいのか，そのための考え方として何があるのか，ということから始めたい．作用素環論についての包括的なテキストとして，[21] を挙げておく．

作用素環論の対象は，Hilbert 空間 (通常可分無限次元のものを考えている) の上の有界線形作用素のなす環である．$*$-演算で閉じていることのほかに，しかるべき位相で閉じていることを要請するが，その位相として norm 位相を考えるか，作用素の強位相 (弱位相でも同じである) によって，考える作用素環は $C^*$-環，または von Neumann 環と呼ばれる．弱い位相で閉じていることの方が強い条件だから，von Neumann 環は $C^*$-環の特別なものであるが，実際には研究の手法がだいぶ違うので，作用素環論研究者の意識としては，作用素環論は $C^*$-環論と von Neumann 環論の 2 つからなるというのが普通の感覚である．さまざまな類似や関連はあるので両方の発展に目を配ることは重要だし，一人で両方やっている人もいるが，たいていは片方を中心に研究しており私は von Neumann 環の方である．(日本でも外国でも，作用素環論 = $C^*$-環論と思っている人がたくさんいて，

「あなた，$C^*$-環をやってるんでしょう」とよく言われる．上の意味でそれは論理的には間違っていないが，私の実感としては間違っている．）ここでついでに言うと,「適当な位相で閉じている」というのは非常に重要な条件である．たとえば，(離散可算) 群 $G$ の (たとえば正則) 表現 $\lambda_g$ を考えよう．$\lambda_g$ たちの線形結合を考えることにより無限次元環ができるが，作用素環論にのせるためには，閉包を取って $C^*$- または von Neumann 環を考える必要がある．完備でない，あるいはもともと位相のない無限次元環もいろいろな分野で最近よく考えられているが，私は真におもしろい現象を見るには完備化するのが適切であると思っている．(完備化する前の世界でおもしろい対象が既に出揃っているという状況は確かにいろいろあって，そういう状況では完備化しなくても結果的に困らないのだが，それは特にいい状況だけを考えているからたまたま都合よくそうなるのであると思う．)

そして，$C^*$-環，または von Neumann 環の構造を理解することが，作用素環論の目標であり，分類理論が中心的な話題である．つまり，作用素環自身，その自己同型，群の作用，部分環などについて，計算可能な完全不変量を求めたり，ありうるものすべてを列挙したりするといった問題である．すべての作用素環について完全な分類リストを作ることができればすばらしいが，そのような分類問題は,「すべての位相空間を分類する」とか「すべての Banach 空間を分類する」とかいった問題と同様，残念ながら絶望的に困難であると考えられている．もちろん完全分類以外にも重要な問題はたくさんあり，すべての，あるいは広いクラスの作用素環に共通して成り立つ性質を調べるとか，ある条件を満たすクラスがどのくらい広いかを調べるとか，完全不変量ではないが興味深い不変量を計算したりする，とかおもしろい例を作る，といった問題があるのは言うまでもない．特に，近年の Voiculescu の自由確率論や，Kirchberg の exact $C^*$-環に関する一連の研究などが重要なテーマであるが，ここでは私の個人的な好みもあって，分類理論に直接関係することに話を限ろう．

作用素環論における分類理論で重要な考え方は,「よいクラスの作用素環は，代数的な不変量によって完全に分類される」ということである．さらに代数的不変量としてどのようなものが生じ得るかについても簡明な特徴づけが可能だ，ということもある．これは 1970 年代の Connes の衝撃的な一連の結果によって生まれたものであり，現在でも重要な考え方として多くの研究の源泉となっている．これについてもう少し詳しく説明しよう.「よいクラス」の条件は，amenable (従順) と呼ばれるものである．これは，もともとは離散群 $G$ に対する条件であり，$\ell^\infty(G)$ 上に平行移動不変な自明でない正値有界線形汎関数が存在するということである．(汎関数が正値とは，$\ell^\infty(G)$ の正の元に正の数を対応させることである．) 可換群や有限群は，amenable である．(ただし，群が $\mathbf{Z}$ の時でさえ，このような汎関数は選択公理による超越的な方法でしか作れない．こういった超越的写像が重要な情報をになっているというのも作用素環論においてよくあることである．) そして一般の離散群について，amenability は「可換に近い」という種類の性質である．これに類似した環の性質が作用素環の amenability であり，多くの同値な言い換えがある．Connes の作用素環論における最大の結果は，von Neumann 環の amenability の特徴づけである．(ついでに言うと，群も環も体も似たようなものだと思って，群や体の性質の類似を作用素環で研究するということもしばしば役に立つ重要な考え方となっている．) そこで，amenable な作用素環の分類，(離散とは限らない) 群が amenable であるとき，amenable な作用素環へのその作用の分類，部分環の入り方が amenable である (ことを定義して，そのような) 場合の入り方の分類などが重要な問題となる．これらについては最近 20 数年間に多くのすばらしい進展があるが，まだまだ完成には程遠い状態にある．群の amenability というのは数学全体で見た場合，それほどどこにでも現れる概念というわけではないように思うが，作用素環論においては決定的に重要な概念である．この

amenable なクラスを超えると，単純な不変量による統一的分類というのは直ちに不可能になると信じる多くの理由がある．また離散群について言えば，作用素環論の立場からは amenable な群は,「$\mathbf{Z}$ と同じようなもの」だがそうでない群は本質的に種類が違うということも言える．($SL(n,\mathbf{Z})$ などのような，Lie 群の離散部分群も作用素環論にとって重要な対象であるが，このようなものは，amenable からかけ離れており，作用素環論的にわかっていることはまだまだわずかである．ついでに言うと，まったく一般の作用素環についてはいくらでも変なことが起きると考えられるが，実際に変な例を作って見せるのはとても難しい．Gromov の原理と呼ばれる「離散群一般についての自明でないステートメントはすべて反例を持つ」というものがあるが，だいたい群環に移れば群の話は作用素環の話とも思えることが多いので，これと同様のことが作用素環でも成り立っていると考えられている．)

次に「代数的な不変量」について説明しよう.「代数的」とは位相がない環でも，同じもの，あるいはよく似たものを定義することができる，という程度の意味である．ある種の写像 (作用素環上の線形汎関数とか，作用素環から別の作用素環への $*$-準同型などだが，もっと複雑なものを考えることも多い) の全体の集合を考えて，適当な同値関係で割ると,「小さい」集合になってそれ自体が代数的構造を持つ，といったタイプのものを考えることが多い．$C^*$-環の $K$-群がその典型的な例である.「適当な同値関係」というのは，内部自己同型 (適当な unitary $u$ によって，$x \mapsto \mathrm{Ad}(u)(x) = uxu^*$ と書かれるもの) を自明と思う，ということによって発生することが多い．代数的構造とは，(有限生成) Abel 群とか，tensor category とかエルゴード flow などである．(最後のものは,「代数的」構造とは言わないかも知れないが．) Connes によって成功し，Haagerup, Jones, Ocneanu, Popa らによって発展させれらた von Neumann 環 (や，その部分環や，その上の群作用) の分類理論はみな，この種の代数的不変量が，なんらかの amenability の仮定のもとで完全不変量であることを主張する．また，単純 $C^*$-環の分類理論では，ここでいう代数的不変量にあたるものは $K$-理論であり,「amenable な単純 $C^*$-環は $K$-理論的不変量によって完全に分類される」というのが Elliott の予想である．この予想についてはこれまでに多くの分類理論が成功している (が，完全に解けたというのにはまだ程遠い)．ここでいう $K$-理論的不変量とは，本質的には $K_0$-群，$K_1$-群だがもう少し付随的な情報も必要である．

この種の分類理論についてもう少し，広く共有されている基本的な考え方について述べよう．可換な von Neumann 環は，$L^\infty(X,\mu)$ の形，可換な $C^*$-環は (乗法単位元を持てば) $C(X)$ の形をしている．(ここで前者の $(X,\mu)$ は測度空間，後者の $X$ は compact Hausdorff 空間である．) だから，von Neumann 環論というのは,「非可換な積分論 (あるいはエルゴード理論)」であり，$C^*$-環論というのは「非可換な位相幾何学」である，というのは古くからある考えであって，最近の非可換幾何学というのもこの延長線上にある．これはこれでいいのだが，上記の分類理論に現れる現象の解釈として，非可換環に移行した方が (テクニカルにはまったくやさしくならないが) むしろ現象が簡単になる，ということが重要な考え方である．たとえば，hyperfinite $\mathrm{II}_1$ factor と呼ばれるものが，von Neumann 以来最も基本的な von Neumann 環の一つでもちろん amenable なものであるが，この環の自己同型で何乗しても内部的にならないものが $\alpha, \beta$ と二つあったとしたら，実は別の自己同型 $\theta$ と，この環の中の unitary $u$ があって，$\mathrm{Ad}(u)\cdot\alpha = \theta\cdot\beta\cdot\theta^{-1}$ という関係が成り立つ．$\mathrm{Ad}(u)$ の部分は,「自明な自己同型」と考えているので，この結果は，何乗しても自明にならないという意味で「一般的」な自己同型は本質的に一つしかないということを意味している．これは Connes による偉大な結果である．エルゴード理論で，hyperfinite $\mathrm{II}_1$ factor の自己同型の「可換版」にあたるものは，Lebesgue 空間の確率測度を保つエルゴード変換と考えられるが，そのようなエルゴード変換がすべて共役など

ということはもちろん成り立たない．(それらは互いに軌道同型というものにはなっていて，このことは作用素環論にとって重要な結果だが，群作用の分類という観点からは，軌道同型による分類では作用している群が何かという情報が失われてしまうという点で問題がある．) 上の Connes の結果では $\mathrm{Ad}(u)$ がついていることが重要であり，非可換環には恒等写像でない内部自己同型があることがこの一意性をもたらしている．また， 上述の Elliott の予想, $K$-theory による amenable な単純 $C^*$-環の分類の可換な場合の対応するステートメントを考えてみると，可換環は (amenable の定義をどのようにしても) 当然 amenable なので,「(局所) compact Hausdorff 空間は $K$-theory によって，位相同型の意味で分類される」というステートメントができるが，もちろん言うまでもなく，こんなことはまったく成り立たない．可換環は，極大イデアルが「たくさん」あるので，(複素数体 $\mathbf{C}$ でない限り) 単純にはならないことに注意しよう．つまり， Elliott の予想は,「$C^*$-環が amenable ということでは可換に近いが，単純という点では可換から非常に遠い」という条件のもとで簡明な分類定理が成り立つと期待するというものなのである．

なお，どの分類定理も証明は高度に技巧的で，基本的には誤差をコントロールしながら一段階ずつ近似をしていく，というタイプのものである．

# 3　Jones の subfactor 理論

さて次に，Jones の始めた subfactor 理論 [10] が上のような一般的枠組みの中でどう考えられるか，またどうしてそれが，さまざまな「quantum 何とか」と呼ばれるものと関係するのかについて説明しよう．ただし，このことについては，これまであちこちに書いており，特に私の本 [7] に詳しく書いてあるので，できるだけ簡単に済ませる．

(適当な位相で閉じた) 両側イデアルは自明なものしかない，というのが単純環の定義である．von Neumann 環の場合は，この条件は中心が $\mathbf{C}$ だけという条件と同値であることが知られており，歴史的な理由により，単純 von Neumann 環とは言わずに，factor と言うことになっている．そこで factor $M$ に別の factor $N$ が含まれている状況を考えるのが subfactor 理論である．群でも環でも体でも似たようなものだ，という考えから，部分群の指数や拡大体の次数に当たるものを考えることができて，subfactor の Jones index という．この値は区間 $[1, \infty]$ に入り，整数でない値も取ることができる．この設定で体と拡大体の Galois 理論の類似，さらにはその「量子化」を行いたいのである．(体論では，体とその拡大体を考えるのが普通であろう．これに合わせて作用素環とその拡大環を考えてもいいのだが，大きい環 $M$ を固定してその部分環 $N$ を調べるという形にした方が自然なことが多いので，こちらの設定で考えて，subfactor という言い方をする．)

作用素環で Galois 対応の類似を考えることは古くから考えられてきた．すなわち，factor $M$ とその上に内部的でないように作用する有限群 $G$ を取る．この作用による不動点環 $M^G$ は自動的に factor になり，環の組 $M^G \subset M$ だけを見て，群 $G$ を復活させることができる．具体的には，$M$ の自己同型で subfactor $M^G$ に自明に働くものたちを持ってくれば最初に考えた $G$ の作用が現れる．また部分群と中間環の Galois 対応も成立する．この subfactor の Jones index は群 $G$ の位数である．この見方を一般の subfactor $N \subset M$ に適用し，あたかも $N$ が「群もどき」の作用による不動点環であるかのように考えることが subfactor 理論の重要な考え方である．この見方を最も推し進めたのが Ocneanu の paragroup 理論 [17] である．以下，Longo のフォーミュレーションによる形で説明しよう．本当に subfactor が有限群作用の不動点環の場合は，大きい環の方の自己同型たちのなす有限群が subfactor から得られたことを思い出そう．一般の subfactor の

場合は，自己同型のかわりに自己「準」同型を考えるとやはりある種の代数系が作れるのである．($M$ の単純性により，自己準同型は自動的に単射になる．これが全射でない場合の方がおもしろい．その場合は，像はもとの環の真部分環だが $M$ 全体と同型であることになる．もちろん有限次元環ではこういうことは起きないが，無限次元ではいくらでもこういうことが起きる．）積の演算は自己準同型の合成であるが，直和も作ることができる．すなわち，$\rho, \sigma$ が $M$ の自己準同型であるとき，$x \mapsto \begin{pmatrix} \rho(x) & 0 \\ 0 & \sigma(x) \end{pmatrix}$ によって，$M$ から $M \otimes M_2(\mathbf{C})$ への準同型ができる．これでは行き先が $M$ になっていないが，$M$ が後述の algebraic quantum field theory から自然に生じる type III factor と言われるクラスに属する場合は，$M \otimes M_2(\mathbf{C})$ と $M$ との間は簡単な方法で同型が作れるので，これによって，$\rho, \sigma$ の直和に当たる自己準同型が作れることになる．また自己準同型の次元というものが定義でき，$[1, \infty]$ に値を持つ．これは上でふれた Jones index (の平方根) と本質的に同じものである．さらに自己準同型の既約性という概念も定義でき，次元が有限のときは自己準同型の既約分解もできる．自己準同型の合成と直和に対し，対応する次元は積と和で与えられ，自己準同型たちのなす代数系は (compact) 群の表現のなす代数系と形式的によく似ている．また，contragredient 表現に類似の cojugate な自己準同型が定義できて，これに対する Frobenius reciprocity なども成り立つ．ここで (compact) 群の表現たちとの違いは，次元が自然数とは限らないことと，表現のテンソル積に対応する演算である，自己準同型の合成が可換とは限らないことである．(無限次元環の自己準同型の合成を考えているのだから，可換になる理由はまったくない．）この代数系はある種の category である．これについても amenability が定義でき，特に既約な object が有限個しかない場合 (有限群の類似) は amenable である．この自己準同型の category の代数的構造 (fusion rule や $6j$-symbol) だけを抽象化したものが paragroup である．そして，作用素環と paragroup の双方に amenability を仮定すれば，subfactor は paragroup で完全に分類される，というのが Popa の分類定理である．この category や $6j$-symbol, paragroup の正確な定義は [7] に書いてあるがここでは省略する．なお，subfactor から生じる上のような tensor category が既約な object が有限個しか持たない場合には，それから (closed な) 3 次元多様体の (複素数値) 不変量や，3 次元 topological quantum field theory が作れることを注意しておく．これは Turaev-Viro の構成を Ocneanu が一般化したものである．

さてこの Popa の結果は，上のセクションで述べた一般的原理，「amenable な状況では代数的不変量が完全不変量を与える」ということの例になっているのだがしかし，ここでは一つ新しい状況が生じている．Paragroup の抽象的特徴づけについてはきれいな結果が得られているが実際にどのようなものが存在するのかについてはよくわかっていおらず，それ自身が作用素環論の枠組みの中で研究できるということである．すなわち，不変量が有限生成 Abel 群だったり，エルゴード flow だったりする場合には，不変量自身の構造はよくわかっているか，少なくともこれまでの長い歴史でいろいろなことが研究されてきている．これに対し tensor category の歴史は浅く，比較的よく研究されているのは，群やその表現からできる場合，パラメータ $q$ を含む量子群の場合などである．しかし，作用素環，特に subfactor 理論の立場からは，deformation parameter $q$ を使って Lie 群から得られる tensor category はかなり特別なもので，その他にも tensor category は「大量に」存在し，それらの構造の解明に作用素環の手法が有用であると期待される．(その根拠として一番大きなものは Haagerup による，Jones index が小さい場合の combinatorial な研究である．）つまり，作用素環には興味がなく，単に tensor category やそこから生じる位相不変量にだけ関心があるとしても作用素環論を用いることによってほかの方法では知られていないことがわかる (可能性がある) ということである．その理由の一つを

感覚的に言えば，無限次元の作用素環がとても「大きく」，さまざまな対象を一つのところに押し込められるといったことである．作用素環から作られる不変量が有限生成 Abel 群の場合はもちろん，作用素環を用いることによって何か理解が深まるとか本質的に新しい例が作れるとかいうことはないし，エルゴード flow の場合も，今のところ作用素環を使うことによって本質的に新しい例が作れるとかいうことはないようであるから，tensor category については新しい，興味深い現象が生じていることになる．これが，subfactor 理論と一連の「quantum 何とか」との関係の基本的なことである．

# 4 Algebraic Quantum Field Theory

場の量子論に対する数学的アプローチはいくつかあるが，ここで述べるのは，作用素環論を用いるものである．“Algebraic” というのは operator algebra を用いるということであり，[9] が標準的な教科書である．(最近の進展については，学会の記録 [15] が参考になるであろう．) 大体の設定を説明しよう．

まず,「時空」を固定してその適当な有界領域たち $\mathcal{O}$ に対しそこで観測可能な物理量のなす作用素環 $A(\mathcal{O})$ を対応させる．(量子力学なので物理量は Hilbert 空間上の作用素で表されていることに注意する．) これらは $\mathcal{O}$ が違っても同じ Hilbert 空間に作用しているものとする．そこで，$\mathcal{O}$ で parametrize された，ある Hilbert 空間上の作用素環の族ができていると考える．このような作用素環の族に，物理的に自然と思われる条件を公理として要請したものを考え，それについて数学的構造を研究することがテーマである．物理的，数学的に興味深い公理の設定は何かについてはいろいろな研究があるが，ここではそれらについて詳しく触れることはせず，基本的な公理についてだけ説明する．たとえば，領域 $\mathcal{O}$ が広くなると，対応する作用素環も大きくなることを要請する．時空領域を広げると観測可能な量も増えるということである．また，領域 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が「空間的」であれば $A(\mathcal{O}_1)$ の元と $A(\mathcal{O}_2)$ の元が可換であることも公理の一つであり，局所性の公理と呼ばれる．これはつまり， $\mathcal{O}_1$ から $\mathcal{O}_2$ へは光速でも到達できないので，$\mathcal{O}_1$ での事象と $\mathcal{O}_2$ での事象は互いに影響がなく，両者での物理量が同時測定可能であるという相対論的要請を意味している．また,「運動群」の unitary 表現 $u_g$ があって，$u_g A(\mathcal{O}) u_g^* = A(g\mathcal{O})$ が成り立つという，共変性も公理の一つである．物理的に自然な設定は，時空として 4 次元 Minkowski 空間を考え，運動群として非斉次 Lorentz 群を取るものである．こういった公理を満たす作用素環の族 $\{A(\mathcal{O})\}$ をしばしば作用素環の net と呼ぶ．

さて数学的問題として，適当に公理付けられた上のような作用素環の net $\{A(\mathcal{O})\}$ について，何か代数的な不変量を見出して構造を明らかにする，さらには分類する，ということを考えてみよう．代数的な不変量として考えるものは，作用素環の net の表現論である．上の設定のように作用素環の net は最初からある Hilbert 空間に作用しているのだが，ほかの Hilbert 空間への表現たちを考えるのである．最初の Hilbert 空間には「真空ベクトル」と呼ばれる特別なベクトルがあることが公理として要請されているので，最初からあるこの Hilbert 空間への作用を真空表現という．次に作用素環の net の大小関係や共変性を保ったまま別の Hilbert 空間へ表現することを考え (ただし真空ベクトルがあることは要請しない)，それらの表現の unitary 同値類を考えるのである．そしてこれらの表現に対して，表現の直和，既約分解，テンソル積，次元といったことを考えるのである．今考えているのは環の族の表現なのでテンソル積をどう定義するかはまったく明らかでないことに注意する．(量子群では coproduct が使えるが今はそんな演算はない．) また次元も普通に表現空間の次元を考えたのでは全部無限大になって何の意味もない．こ

れらを扱うのが，Doplicher-Haag-Roberts (DHR) の理論 [6] であり，局所性を使って，表現が作用素環の net の自己準同型で表されることをまず示す．(もとから作用素環の net は Hilbert 空間に作用しているので，この net の自己準同型があればそれは同じ Hilbert 空間への別の表現と思える．任意の表現は unitary 同値類の中で取り替えることによってこの形にできるのである．) するとテンソル積は自己準同型の合成で定義され，次元もうまく定義される．この状況が前のセクションで述べた subfactor 理論とよく似ていることは明らかであろう．歴史的には，DHR 理論の方がずっと昔からあり，Jones の subfactor 理論との関係は Longo [14] によって明らかにされた．前のセクションの状況では作用素環の自己準同型の合成は一般に可換でなかったが，こちらの設定では局所性によって，合成が (unitary 同値類の意味で) 可換であることが示される．このようにして，作用素環の net の表現論からある category が得られる．

さて，このような設定で表現論を考えるのだが，時空の設定については上に書いたように，もっとも自然なものは 4 次元 Minkowski 空間である．実際 4 次元 Minkowski 空間上の作用素環の net について多くの深い結果が得られているが,「quantum 何とか」との関連において興味深いのはむしろ，時空の次元が低い場合，たとえば 1 次元の場合であることが [8] などによってわかってきた．1 次元ではもはや「時空」とは言えないであろうが，数学的構造を公理的に調べる限りにおいては次元は何でもかまわないのである．次元が低くなると，特に 1 次元になると数学的な問題は易しくなると思うかもしれないが，そうではない．1 次元の場合，上でいう有界領域 $\mathcal{O}$ としては空でない有界連結開区間を取るが，このとき 1 次元ではその補集合が連結でないことにより，むしろ面白い現象が起こるのである．たとえば，上で述べたように自己準同型の合成は up to unitary equivalence で可換なのだが，二つの合成の unitary 同値を与える unitary 作用素は non-trivial なもので，braiding を与える．これによって表現論は braided tensor category になる．時空の次元が高いと，この braiding は自動的に trivial なものになってしまうが，1 次元では多くの non-trivial な braiding, たとえば Wess-Zumino-Witten model にあたるものが，この設定での表現論の braided tensor category として実現される．また表現の次元に当たるものも，時空の次元が高いと自動的に自然数になってしまうが，1 次元では非整数値を取ることができ，量子群でいう量子次元がこの設定で実現できる．

# 5 Tensor category, modular invariants, $\alpha$-induction

やっと，私の研究しているテーマの話題になった．これがだいたい，本 [7] を書いた後に研究していることである．テクニカルなことを細かく書いても仕方ないと思うので，主要な結果を簡単にまとめておく．

## 5.1 Completely rational AQFT

上述のように，1 次元時空上の作用素環の net から braided tensor category が生じるのだが，conformal field theory, topological quantum field theory などとの関連で興味深いのは，既約な object が有限個しかなくて，braiding が非退化なものである．この前者の有限性条件は普通，rationality と呼ばれる．また，braiding の非退化性は，$S$-行列が可逆であることと同じであり，この二つの条件を満たす braided tensor category は modular tensor category と呼ばれる．これについては [22] が詳しい．[13] における我々の主結果は，rationality を導く作用素環的に簡明な十分条件を与えたこと，この条件のもとで braiding

は自動的に非退化になることを示したことである．この条件を我々は，complete rationality と呼んだ．[23], [25] の結果によって，$SU(n)$ の loop group [19] から作られる作用素環の net は completely rational であることがわかる．Xu [26, 27, 28] によって，completely rational な作用素環の net がさらに詳しく調べられている．

## 5.2 $\alpha$-induction と modular invariant

何度も述べているように，作用素環の net の表現論は，普通の群の表現論とさまざまな形式的類似を持つ．そこで普通の表現論における induction/restriction の類似をしようというのが $\alpha$-induction の理論である．群と部分群の関係の類似として作用素環の net とその部分環の net を考える．そして，部分環の net の表現から大きい環の net の表現を作るのである．(小さい環から大きい環に移行するので induction という名前がついているが，作用素環の net の設定では，むしろ大きい環の net の方が小さい symmetry と考えられるので，これは restriction もどきと言った方が適切かもしれない．) この $\alpha$-induction は最初 Longo-Rehren [16] によって定義され，Xu [24] によって詳しく調べられ，その後さらに，Böckenhauer-Evans によって調べられた．一方，Longo-Rehren と同じ頃，Ocneanu [18] はまったく異なった動機から，$A$-$D$-$E$ 型 Dynkin 図形に関する combinatorial な研究を行っていた．我々は，[1] において，Longo-Rehren の定義と，Ocneanu の定義はどちらも Rehren [20] の意味で braiding を持つような状況に一般化できて，その状況のもとで一致することを証明した．そして，両方の手法をあわせることにより，多くの結果を [2, 3, 11] において得た．小さい作用素環の net の表現から大きい作用素環の net の表現を作りたいのだが $\alpha$-induction ではこのために braiding を用いる．Braiding は常に overcrossing と undercrossing が対になっているので，それに応じて 2 種類の $\alpha$-induction が可能であり，$\pm$ をつけて区別する．ここで正確には，$\alpha$-induction では，小さい作用素環の net の表現から出発しても一般にはうまく大きい作用素環の net の表現を作ることはできず,「表現もどき」にしかならない．$+$ の braiding から $\alpha$-induction によって作られる表現もどきと，$-$ の braiding から $\alpha$-induction によって作られる表現もどきの共通部分がぴったり，大きい作用素環の net の表現になっているのである．また，小さい作用素環の net の表現論が modular tensor cateogry をなしている場合 (たとえば上のように，completely rational な場合) には，$SL(2, \mathbf{Z})$ の有限次元 unitary 表現が得られるが，$\pm$ の $\alpha$-induction をあわせ用いることによって，この表現の値域と交換する，自然数成分の行列を作り出すことができる．このことは，Ocneanu, Böckenhauer-Evans の仕事の一般化として，[1] において我々が非常に一般的な仮定のもとで証明した．このような行列は，“modular invariant” という名前で [4] など多くの研究があり，さまざまな分類定理が得られている．(たとえば [5] を見よ．) 我々の結果によって，このような分類についての結果が作用素環的に解釈，実現できるようになった．また，$\alpha$-induction によって生じる tesnor category についても多くのことがわかって来ている．

## 5.3 Central charge と net の分類

最初に書いたように，amenable な状況下では，代数的な完全不変量があるはずだというのが基本的な考え方である．作用素環の net の場合，各時空領域 $\mathcal{O}$ に応じて定まる作用素環 $A(\mathcal{O})$ はすべて，標準的な公理の元では hyperfinite type $\mathrm{III}_1$ factor と呼ばれる amenable な factor であることがわかっている．そこで (少なくとも completely rational な状況下では) 上述のように表現論から生じる modular tensor category が作用素環の net

の完全不変量を与えるのではないかと期待されるが，そのような結果は今のところまったく得られていない．さらに，どのような modular tensor category がこうして得られるかということもよくわかっていない．構成は今のところすべて，ケースバイケースの面倒な議論によっている．そこで一般的な分類，構成問題はまだまだ解決に程遠いのだが，そのような分類理論の第一歩となる結果を，最近 [12] において得た．すなわち，1 次元時空の上の作用素環の net を考え，さらに時空を compact 化して $S^1$ と思う．(これは単に記述をきれいにするためのもので本質的な問題には変わりがないことがわかっている．) さらに運動群として強く，$S^1$ 上の微分同相写像群を取る．すると，一般的に作用素環の net に対し，Virasoro algebra の表現論を経由して "central charge" が定義できることがわかる．この central charge $c$ が 1 未満のときは離散的な値しか取らないことがよく知られており，この場合には作用素環の net が完全に分類，列挙できるというのが [12] における我々の主結果である．これには，上述の $\alpha$-induction と modular invariant の結果をフルに用いる．分類結果は，$A$-$D$-$E$ 型の Dynkin 図形の組を用いて表すことができる．

## 6　これからの発展

上で述べたように作用素環の net については，分類問題は，完全不変量を得るという点でも，どのような不変量が生じうるか特徴づけるという点でも，また具体的に可能なものを列挙するという点でもまったく未解決である．また，上では詳しく述べなかったが，公理系についてもさまざまな条件が考えられてきており，どの公理系が適当か，また，一見強い公理に見えるものが他の公理から導かれないかどうかなどについてもわかっていないことが多い．また，量子群，vertex operator algebra, monster と moonshine, topological quantum field theory などとの関連についても，まだまだ断片的なことしか (あるいはまったく) わかっていない．これらの点について，さらには現時点では全く予想できないような方向への発展も含めて，これからの発展に期待して筆を置く．

# References


[1] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *On $\alpha$-induction, chiral projectors and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **208** (1999) 429–487.

[2] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *Chiral structure of modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **210** (2000) 733–784.

[3] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *Longo-Rehren subfactors arising from $\alpha$-induction*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **31** (2001) 1–35.

[4] A. Cappelli, C. Itzykson & J.-B. Zuber, *The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories*, Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1–26.

[5] P. Di Francesco, P. Mathieu & D. Sénéchal, "Conformal Field Theory", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1996.

[6] S. Doplicher, R. Haag & J. E. Roberts, *Local observables and particle statistics*, I. Commun. Math. Phys. **23**, 199–230 (1971); II. **35**, 49–85 (1974).

[7] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, "Quantum Symmetries on Operator Algebras", Oxford University Press, Oxford, 1998.

[8] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren & B. Schroer, *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras*, I. Commun. Math. Phys. **125** (1989) 201–226, II. Rev. Math. Phys. **Special issue** (1992) 113–157.

[9] R. Haag "Local Quantum Physics", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1996).

[10] V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983) 1–25.

[11] Y. Kawahigashi, *Generalized Longo-Rehren subfactors and $\alpha$-induction*, to appear in Commun. Math. Phys., math.OA/0107127.

[12] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Classification of Local Conformal Nets. Case $c < 1$*, preprint 2002, math-ph/0201015.

[13] Y. Kawahigashi, R. Longo & M. Müger, *Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **219** (2001) 631–669.

[14] R. Longo, *Index of subfactors and statistics of quantum fields*, I. Commun. Math. Phys. **126** (1989), II. 217–247 & **130** (1990) 285–309.

[15] R. Longo (ed.), "Mathematical Physics in Mathematics and Physics", Fields Inst. Commun. **30**, Providence, Rhode Island: AMS Publications.

[16] R. Longo & K.-H. Rehren, *Nets of subfactors*, Rev. Math. Phys. **7** (1995) 567–597.

[17] A. Ocneanu, *Quantized group, string algebras and Galois theory for algebras*, in *Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)*, (ed. D. E. Evans and M. Takesaki), London Mathematical Society Lecture Note Series **36**, Cambridge University Press, Cambridge, 1988, 119–172.

[18] A. Ocneanu, *Paths on Coxeter diagrams: from Platonic solids and singularities to minimal models and subfactors*, (Notes recorded by S. Goto), in *Lectures on operator theory*, (ed. B. V. Rajarama Bhat et al.), The Fields Institute Monographs, AMS Publications, 2000, 243–323.

[19] A. Pressley & G. Segal, " Loop Groups", Oxford University Press, Oxford, 1986.

[20] K.-H. Rehren, *Braid group statistics and their superselection rules*, in: "The Algebraic Theory of Superselection Sectors", D. Kastler ed., World Scientific, Singapore, 1990.

[21] M. Takesaki ,"Theory of Operator Algebras. I, II, III" Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2002.

[22] V. G. Turaev, "Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds", Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1994.

[23] A. Wassermann, *Operator algebras and conformal field theory III: Fusion of positive energy representations of $SU(N)$ using bounded operators*, Invent. Math. **133** (1998) 467–538.

[24] F. Xu, *New braided endomorphisms from conformal inclusions*, Commun. Math. Phys. **192** (1998) 347–403.

[25] F. Xu, *Jones-Wassermann subfactors for disconnected intervals*, Commun. Contemp. Math. **2** (2000) 307–347.

[26] F. Xu, *Algebraic coset conformal field theories I*, Commun. Math. Phys. **211** (2000) 1–44.

[27] F. Xu, *3-manifold invariants from cosets*, preprint 1999, math.GT/9907077.

[28] F. Xu, *Algebraic orbifold conformal field theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **97** (2000) 14069–14073.