ランダム・シュレーディンガー作用素の基礎[1]

慶應義塾大学医学部　南　就将

目 次

1　ランダム・シュレーディンガー作用素の定式化

1.1　問題の起源

P.W. Anderson (1958) [2] は離散的な空間格子 (例えば $\mathbf{Z}^d$) の点 (sites) の間を移り歩く量子力学的粒子を記述するモデル (tight bindeing model) で, 系自体が「乱れ」(disorder) を含むものを考えた. そのハミルトニアン

$$h = \sum_{x,y} \epsilon_{xy}|x\rangle\langle y| + \sum_x v_x|x\rangle\langle x| \tag{1}$$

において ϵ_{xy} は x と y が最近接格子点のときは $\epsilon_{xy} = \epsilon > 0$, それ以外の場合は $\epsilon_{xy} = 0$ であり, v_x たちは区間 $[-W, W]$ において一様分布に従って互いに独立にランダムな値をとる. (Anderson は実際には ϵ_{xy} が site 間の距離 r の -3 乗よりも速く減少するケースを考えてい

[1]本稿は 2010 年 8 月 26 － 29 日に開催された「Summer School 数理物理 2010：ランダム・シュレーディンガー作用素」の講演予稿に加筆・修正を施したものです.

る．）時刻 t, site x における粒子の確率振幅を $a_x(t)$ とすると, その時間発展は Schrödinger 方程式

$$i\frac{d}{dt}a_x(t)=\sum_y \epsilon_{xy}a_y(t)+v_x a_x(t) \tag{2}$$

により記述される．アンダーソンは, 現象の物理的状況をある程度表現した最も単純なモデルとして (1), (2) を考察し, 次のことを「定理」として主張した（アンダーソンの局在定理）: **時刻 $t=0$ において site k に集中した波動関数 $\{a_j(t)\}_j$ ($a_j(0)=\delta_{jk}$) は $t\to\infty$ においてもやはり site k の近傍に集中している．** このような波動関数の空間的局在は系の乱れに起因するものである．

1.2　量子力学の枠組み

次の３つの仮説により量子力学は数学に翻訳される．詳しい用語の説明は次の小節で行う．

仮説１　（自由度 d の）孤立した物理系の状態はあるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の規格化されたベクトル ψ ($\|\psi\|=1$) で表される．

仮説２　物理系に対する観測可能量 (observable) は ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における自己共役作用素 A で表される．特に系のエネルギーを表す自己共役作用素 H をその系のハミルトニアンという．

observable A （を表す自己共役作用素）のスペクトル分解を $A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda E(d\lambda)$ とするとき, 状態 ψ に対する A の観測値が区間 I に含まれる確率は $\int_I\langle\psi,E(d\lambda)\psi\rangle$ で与えられる．

仮説３　時刻 0 における系の状態が $\psi_0\in\mathcal{H}$ で表されるならば, 時刻 t における状態は $\psi_t=e^{-itH}\psi_0$ で表される．特に ψ_0 が作用素 H の定義域に属するならば, ψ_t も H の定義域に属し, Schrödinger 方程式

$$i\frac{d}{dt}\psi_t=H\psi_t$$

に従う．（ただし Planck 定数 $\hbar=1$ とおいた．）

1.3　自己共役作用素とそのスペクトル

仮説１〜３の詳しい意味, およびアンダーソンの「局在定理」を数学の言葉に翻訳するために必要な定義, 定理をいくつか述べる．

[I] 複素ベクトル空間 $\mathcal{H}$ の勝手な２元 φ,ψ に対して複素数 $\langle\varphi,\psi\rangle$ が対応して次の条件を満たすとき, $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathcal{H}$ における内積と呼び, $\mathcal{H}$ を前ヒルベルト空間（あるいは複素内積 空間）と呼ぶ：

(i) $\langle\varphi,\varphi\rangle\geq 0$ であり, $\langle\varphi,\varphi\rangle=0$ となるのは $\varphi=0$ のときに限る；

(ii) 勝手な複素数 α_1, α_2 および $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2, \psi\rangle = \alpha_1\langle\varphi_1,\psi\rangle + \alpha_2\langle\varphi_2,\psi\rangle$;

(iii) $\langle\varphi,\psi\rangle = \overline{\langle\psi,\varphi\rangle}$.

また $\|\varphi\| := \sqrt{\langle\varphi,\varphi\rangle}$ をベクトル φ のノルムという. 前 Hilbert 空間の例を挙げる：

$$\mathcal{H}_0 := \{\psi;\ \psi(x) \text{ は } \mathbf{R}^d \text{ 上の連続な複素数値関数で, 広義リーマン積分 } \int_{\mathbf{R}^d} |\psi(x)|^2 dx < \infty\ \}$$

$$\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbf{R}^d) := \{\psi;\ \psi \text{ は } \mathbf{R}^d \text{ 上のルベーグ可測な複素数値関数で } \int_{\mathbf{R}^d} |\psi(x)|^2 dx < \infty\ \}$$

ただしここでの積分はルベーグ積分である. （$\psi(x)$ が連続関数ならば広義リーマン積分と一致する. ）

$$\mathcal{H}_2 = \ell(\mathbf{Z}^d) := \{\psi;\ \psi \text{ は } \mathbf{Z}^d \text{ 上の関数で } \sum_x |\psi(x)|^2 < \infty\}$$

$$\mathcal{H}_3 = \mathbf{C}^d := \{\psi = {}^t(\psi_1, \ldots \psi_d);\ \psi_j \text{ は複素数}\ \}$$

$\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ における内積はそれぞれ

$$\langle\varphi,\psi\rangle_1 = \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx \quad ; \quad \langle\varphi,\psi\rangle_2 = \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} \varphi(x)\overline{\psi(x)} \quad ; \quad \langle\varphi,\psi\rangle_3 = \sum_{j=1}^d \varphi_j\bar{\psi}_j$$

である. 積分の意味のちがいを除けば $\mathcal{H}_0$ の内積は $\mathcal{H}_1$ の内積 と同じ.

[II] 前ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における列 $\{\psi_n\}$ がコーシーの条件 $\lim_{n,m\to\infty}\|\psi_n - \psi_m\| = 0$ を満たすならば, ある ψ が $\mathcal{H}$ の中に必ず存在して $\lim_{n\to\infty}\|\psi_n - \psi\| = 0$ となるとき, $\mathcal{H}$ は完備であるという. 完備な前ヒルベルト空間をヒルベルト空間という. 上にあげた $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ はいずれも完備でありヒルベルト空間となるが, $\mathcal{H}_0$ は完備ではない.

$\mathcal{H}_0$ が完備でないことは, 例えば階段関数のような不連続関数に2乗平均収束する連続関数の列 $\{\psi_n\} \subset \mathcal{H}_0$ を考えれば, コーシーの条件を満たしながら $\mathcal{H}_0$ 内に極限を持たない列の存在がわかる. $\mathcal{H}_1$ が完備であることを証明するにはルベーグ積分論が必用である. 実は $\mathcal{H}_1$ は $\mathcal{H}_0$ の「完備化」, いいかえると $\mathcal{H}_0$ を含む最小のヒルベルト空間になっている.

$\mathcal{H}_3$ の完備性は複素数体の完備性による. $\mathcal{H}_2$ が完備であることの証明は関数解析のよい演習問題だからここに概略を述べる：$\{\psi_n\}_n \subset \mathcal{H}_2$ がコーシーの条件を満たすならば, 明らかに任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して複素数列 $\{\psi_n(x)\}_n$ もコーシーの条件を満たす. 従って各々の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して $\lim_{n\to\infty}\psi_n(x) =: \psi(x)$ が存在する. 条件より $\{\|\psi_n\|\}_n$ は有界, すなわち定数 $C > 0$ が存在して $\|\psi_n\| \le C$. 従って任意の有限集合 $K \subset \mathbf{Z}^d$ に対して

$$\sum_{x\in K}|\psi(x)|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{x\in K}|\psi_n(x)|^2 \le \limsup_{n\to\infty}\|\psi_n\| \le C\ .$$

ここで $K \uparrow \mathbf{Z}^d$ として $\sum_{x\in\mathbf{Z}^d}|\psi(x)| < \infty$, すなわち $\psi \in \mathcal{H}_2$ がわかる. このこととコーシーの条件より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N および有限集合 $K \subset \mathbf{Z}^d$ が存在して, 任意の $n \ge N$ に対して

$$\sum_{x\in\mathbf{Z}^d\setminus K}(|\psi(x)|^2 + |\psi_n(x)|^2) \le \varepsilon$$

となる．これを用いて $\lim_{n\to\infty}\|\psi-\psi_n\|=0$ を示すことができる．

一般に稠密な可算部分集合を持つ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は「可分」(separable) であるという．$\mathcal{H}$ が可分のとき $\langle e_n, e_m\rangle=\delta_{nm}$ を満たす有限または可算列 $\{e_n\}\subset\mathcal{H}$ が存在して, 任意の $\psi\in\mathcal{H}$ は $\sum_n\langle\psi,e_n\rangle e_n$ と表される．このような $\{e_n\}_n$ を $\mathcal{H}$ の完全正規直交系という．例として論じた Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ はいずれも可分である．以後, Hilbert 空間は可分であることをつねに仮定する．

[III] ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間 $\mathcal{D}(A)$ を定義域とする線型写像 $A:\mathcal{D}(A)\longrightarrow\mathcal{H}$ が自己共役とは, 次の 2 条件を満たすことである：

(i) $\mathcal{D}(A)$ の任意の 2 元 φ, ψ に対して $\langle A\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,A\psi\rangle$;

(ii) 写像 $\mathcal{D}(A)\ni\varphi\mapsto\langle A\varphi,\psi\rangle$ が連続ならば $\psi\in\mathcal{D}(A)$.

「写像 $\mathcal{D}(A)\ni\varphi\mapsto\langle A\varphi,\psi\rangle$ が連続」という条件を仮に (S) と名づけよう．ψ が条件 (S) を成り立たせるとき, $F(\varphi):=\langle A\varphi,\psi\rangle$ とおくと F はその線形性により $\mathcal{D}(A)$ 上で一様連続となり, 従ってその定義域は $\mathcal{D}(A)$ からその閉包, すなわち $\mathcal{H}$ 全体に連続線形汎関数として自然に拡張される．従って Riesz の定理より

$$F(\varphi)=\langle\varphi,\psi^*\rangle\ ,\quad \varphi\in\mathcal{H}$$

を満たす $\psi^*\in\mathcal{H}$ が一意に定まる．よって ψ に対する条件 (S) は

$$\exists\psi^*\in\mathcal{H}:\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(A)\ ,\quad \langle A\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,\psi^*\rangle$$

と同値になるが, この条件を満たす ψ の全体を $\mathcal{D}(A^*)$, 対応する ψ^* を $A^*\psi$ と記す．対応

$$\mathcal{D}(A^*)\ni\psi\mapsto\psi^*=A^*\psi$$

は明らかに線形である．この A^* を A の共役作用素という．共役作用素の概念を用いると, 条件 (i) は A^* が A の拡張である（$A\subset A^*$ と記す）ことと同値．このような作用素 A は**対称**であるという．また条件 (ii) は $\mathcal{D}(A^*)\subset\mathcal{D}(A)$ と同値であり, (i), (ii) を合わせた条件は $A=A^*$ と表すことができる．これが自己共役作用素のもともとの定義である．

例 1. d 次元 Schrödinger 作用素

$$H=-\Delta+V(x)\ ,\quad \Delta=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\ ,\quad V(x)\ \text{は}\ \mathbf{R}^d\ \text{上の実数値可測関数}$$

は, ポテンシャルを表す関数 $V(x)$ に対する適当な条件の下に（例えば $V(x)$ が下に有界ならばよい）$\mathcal{H}_1=L^2(\mathbf{R}^d)$ における自己共役作用素となる．

例 2. (1) において $\epsilon=1$ として定義される $\mathcal{H}_2=\ell(\mathbf{Z}^d)$ における作用素 h, すなわち

$$(h\psi)(x)=\sum_{y:|y-x|=1}\psi(y)+v(x)\psi(x) \tag{3}$$

は $\{v(x)\}_{x\in\mathbf{Z}^d}$ が非有界であっても

$$\mathcal{D}(h) := \{\psi \in \mathcal{H}_2;\ \sum_x |v(x)\psi(x)|^2 < \infty\}$$

を定義域として自己共役となる．これを示すために $\psi \in \mathcal{H}_2$, $\psi \neq 0$, が条件 (S) を満たすとする．線形性より (S) は

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{D}(h),\ \|\varphi\|=1} |\langle h\varphi, \psi\rangle| < \infty$$

と同値. h の定義よりこれはさらに

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{D}(h),\ \|\varphi\|=1} \left|\sum_{x\in\mathbf{Z}^d} \varphi(x)V(x)\overline{\psi(x)}\right| < \infty$$

と同値である．$\mathbf{Z}^d$ の有限部分集合の列 $\{K_n\}_n$ で $K_n \nearrow \mathbf{Z}^d$ を満たすものをとり,

$$\varphi_n := \frac{\chi_{K_n}V\psi}{\|\chi_{K_n}V\psi\|}$$

とおくと, 十分大きなすべての n に対して φ_n は定義され, $\|\varphi_n\| = 1$. ただし χ_K は集合 K の定義関数である．$\varphi(x)$ は有限集合 K_n の外では 0 だから明らかに $\mathcal{D}(h)$ に属し, したがって $\sup_n |\langle\varphi_n, V\psi\rangle| < \infty$. 一方

$$\lim_{n\to\infty}\langle\varphi_n, V\psi\rangle = \lim_{n\to\infty}\|\chi_{K_n}V\psi\| = \|V\psi\| < \infty$$

だから $\psi \in \mathcal{D}(h)$ である．よって条件 (ii) が成り立つ．(i) が成り立つことは形式的な計算から明らかである．

例 3. $A = (a_{kj})_{k,j=1}^d$ がエルミート行列のとき, $\psi = (\psi_j) \in \mathcal{H}_3$ に対して $(A\psi)_k = \sum_j a_{kj}\psi_j$ とおくと, $\mathcal{H}_3$ における自己共役作用素 A が得られる．A の定義域はもちろん $\mathcal{H}_3 = \mathbf{C}^d$ 全体.

Schrödinger 作用素 H の定義域をきちんと書くのは難しいが, $\mathcal{H}_1$ は微分可能でない関数も含んでいることから, $\mathcal{D}(H) \neq \mathcal{H}_1$ であることはわかる．一方, 微分可能でない関数も滑らかな関数で 2 乗平均の意味では近似できる．このことから $\mathcal{D}(H)$ は $\mathcal{H}_1$ において稠密であることがわかる．また $\mathbf{Z}^d$ の有界部分集合の外では恒等的に 0 となる関数の全体 $\mathcal{K}$ は $\mathcal{H}_2$ において稠密であり, $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}(h)$ だから $\mathcal{D}(h)$ も $\mathcal{H}_2$ において稠密である.

[IV]

定義 1.1 *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ における線形作用素 E が $\mathcal{H}$ の閉部分空間 L への直交射影とは, 任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\|\psi - E\psi\| = \inf_{\varphi\in L}\|\psi - \varphi\|$$

となることである.（任意の閉部分空間 L に対してこの意味での直交射影は必ず存在する．）

E がある閉部分空間 L への直交射影であるための必要十分条件は E が $\mathcal{H}$ における有界自己共役作用素で $E^2 = E$ を満たすことである．このとき $L = E\mathcal{H}$, かつ

$$\dim L = \mathrm{Tr}E = \sum_n \langle \psi_n, E\psi_n \rangle$$

である．（$\{\psi_n\}$ は $\mathcal{H}$ の完全正規直交基底．）

定義 1.2 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ は実数直線 $\mathbf{R}$ の *Borel* 部分集合のなす $\sigma-$ 代数とする．$\mathcal{H}$ における直交射影の族 $\{E(B); B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}$ が**単位の分解**とは,

(i) $E(\mathbf{R}) = I$;

(ii) $B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ならば $E(B_1)E(B_2) = 0$;

(iii) $B_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, $B_n \cap B_m = \emptyset$, $n \neq m$, ならば

$$E\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big)\psi = \sum_{n\geq 1} E(B_n)\psi\ , \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

が成り立つことである．このとき任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\mu_\psi(B) = \langle E(B)\psi, \psi \rangle\ , \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

とおくと $\mu_\psi(\cdot)$ は $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上の有限測度で $\mu_\psi(\mathbf{R}) = \|\psi\|^2$.

次の「スペクトル分解定理」が成り立つことが知られている：

定理 1.3 A が可分なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における自己共役作用素ならば, $\mathcal{H}$ における単位の分解 $\{E(B);\ B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}$ が存在して（A のスペクトル分解という）,

$$\psi \in \mathcal{D}(A) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \mu_\psi(d\lambda) < \infty \tag{4}$$

かつ $\psi \in \mathcal{D}(A)$ に対して

$$\langle A\psi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mu_\psi(d\lambda) \tag{5}$$

が成り立つ．このことを略記して $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda E(d\lambda)$ のように書く．また μ_ψ をベクトル ψ に関する A のスペクトル測度という．

この定理は von Neumann [39] によるもので, Dirac がその主著 “The principles of quantum mechanics”[9] において $A = \sum_\alpha \lambda_\alpha |\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha|$ とか $A = \int \lambda |\lambda\rangle\langle\lambda| d\lambda$ などと書いていたものに統一的な意味を与えたものである．

また, スペクトル分解 $\{E(B);\ B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}$ を用いると, A の「関数」 $f(A)$ が $f(A) = \int f(\lambda)E(d\lambda)$ により定義される．f が実数値関数ならば $f(A)$ は自己共役作用素で, その定義域は

$$\mathcal{D}(f(A)) = \{\psi \in \mathcal{H};\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \mu_\psi(d\lambda) < \infty\}$$

で与えられる．また f が有界可測関数ならば $f(A)$ は有界作用素．特に $e^{-itA} = \int e^{-it\lambda}E(d\lambda)$．
また $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ に対して

$$(A-z)^{-1} = \int \frac{1}{\lambda - z} E(d\lambda) \tag{6}$$

を A の resolvent という．

[**V**] 自己共役作用素 A のスペクトル分解 $\{E(d\lambda)\}$ は $\int_{-\infty}^{\infty} E(d\lambda) = E(\mathbf{R}) = I$（恒等作用素）をみたす．そこで $\int_S E(d\lambda) = I$ となるような最小の閉集合 S を A のスペクトル集合（spectrum）と呼んで, $S = \sigma(A)$ で表す．いいかえると

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{R};\ \forall\varepsilon > 0,\ E((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) \neq 0\}\ .$$

$\sigma(A)$ の孤立点は A の固有値であるが, 逆はいえない．

さらに

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \mathbf{R};\ \forall\varepsilon > 0,\ \mathrm{Tr}E((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) = \infty\}$$

を A の essesntial spectrum といい,

$$\sigma_{dis}(A) := \{\lambda \in \mathbf{R};\ \exists\varepsilon > 0,\ 0 < \mathrm{Tr}E(\{\lambda\}) = \mathrm{Tr}E((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) < \infty\}$$

を A の discrete spectrum という．$\sigma_{dis}(A)$ は A の固有値のうち, 有限多重度を持ち $\sigma(A)$ の孤立点であるものの全体であり, $\sigma_{dis}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A)$ が成り立つ．

A のすべての固有ベクトルが生成する $\mathcal{H}$ の閉部分空間を $\mathcal{H}_p$, $\mathcal{H}_p$ の直交補空間を $\mathcal{H}_c$ とする（連続部分空間という）．実は

$$\mathcal{H}_c = \{\psi \in \mathcal{H};\ \mu_\psi(d\lambda) = \langle \psi, E(d\lambda)\psi \rangle \text{ は連続な測度 }\}$$

となる．そこで $\mu_\psi(d\lambda)$ が絶対連続となるような $\psi \in \mathcal{H}$ の全体を $\mathcal{H}_{ac}$, 特異連続となるような $\psi \in \mathcal{H}$ の全体を $\mathcal{H}_{sc}$ とすると $\mathcal{H}_{ac}$, $\mathcal{H}_{sc}$ はそれぞれ $\mathcal{H}_c$ の互いに直交する閉部分空間であり,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_c = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc} \tag{7}$$

が成り立つ．自己共役作用素 A の $\mathcal{H}_p$, $\mathcal{H}_c$, $\mathcal{H}_{ac}$, $\mathcal{H}_{sc}$ への制限は, それぞれの部分空間における自己共役作用素となる．それらの spectrum をそれぞれ $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_{ac}(A)$, $\sigma_{sc}(A)$ と書いて, A の点スペクトル, 連続スペクトル, 絶対連続スペクトル, 特異連続スペクトルと呼ぶ．A のすべての固有値の集合を Λ とするとき $\sigma_p(A) = \overline{\Lambda}$ であることに注意する．

[**VI**] ヒルベルト空間が $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = L^2(\mathbf{R}^d)$,（または $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 = \ell(\mathbf{Z}^d)$）, 自己共役作用素（ハミルトニアン）が Schrödinger 作用素 $A = H$（または tight binding model $A = h$）の場合に, D. Ruelle は次の定理を示した：

定理 1.4 ([32]) $\|\psi\| = 1$ なる $\psi \in \mathcal{H}$ について

(i) $\psi \in \mathcal{H}_p$ であるためには, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\inf_{t \geq 0} \left\{ \int_{\{|x| \leq R\}} |e^{itA}\psi(x)|^2 \; dx \right\} \geq 1 - \varepsilon$$

をみたす $R > 0$ が存在することが必要十分.

(ii) $\psi \in \mathcal{H}_c$ であるためには, $R > 0$ をいかに大きくあたえても

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{|x| \leq R} |e^{itA}\psi(x)|^2 dx = 0$$

となることが必要十分.

この意味で $\psi \in \mathcal{H}_p$ を H の束縛状態, $\psi \in \mathcal{H}_c$ を H の散乱状態と呼ぶ.

1.4 アンダーソン局在の数学的な意味. 厳密な結果

定理 1.4 (i) を考慮すれば, アンダーソンの「局在定理」を次のようにいいかえることができよう：**ランダム性を含む上記 (1) のようなハミルトニアンにおいては, 確率１ですべての状態が束縛状態である. すなわち, ランダムな自己共役作用素 h は確率１で点スペクトルのみを持つ.**

こうしてランダムなシュレーディンガー作用素, またはランダムな tight binding model のスペクトルの性質が物理的な意味を持つ研究課題となるのである. 上記の意味でのアンダーソン局在に関する厳密な結果について今日では数多くの文献があるが, ここでは歴史的に重要なもののみいくつか紹介しよう. 詳しくは Stollmann [37] 等を参照されたい.

$d = 1$ **の場合の厳密な結果:**

(i) Goldsheidt, Molchanov, Pastur [15] は 1 次元のランダムなシュレーディンガー作用素

$$H_\omega = -\frac{d^2}{dt^2} + F(X_t(\omega)) \quad (-\infty < t < \infty) \tag{8}$$

が確率 1 で点スペクトルのみ持つことを示した. ここで $\{X_t(\omega)\}$ はコンパクトなリーマン多様体 M（例えば円周）上の定常な Brown 運動, $F(x)$ は M 上の C^∞ 級関数で「非退化」かつ $\inf_x F(x) = 0$ をみたすものである. H_ω の spectrum は確率 1 で

$$\sigma(H_\omega) = \left[\inf_x F(x), \infty\right) = [0, \infty)$$

となる. したがって H_ω の固有値は半無限区間に稠密に分布する. 証明には $\{X_t(\omega)\}$ が強い混合性を持つこと, $\{X_t(\omega)\}$ の確率分布が滑らかなこと, 関数 $F(x)$ がその分布の滑らかさを忠実に伝えることが用いられるが, 議論は難解である.

(ii) Molchanov [26] は [15] において扱われたモデル H_ω の固有関数が, ある点を中心として指数関数的に減衰することを示した.

(iii) R.Carmona [4] は上記 (i), (ii) に対する見通しの良い別証明を与えた. Carmona の証明は Kotani [22] によりさらに単純化された.

$d > 1$ **の場合の厳密な結果**

$d > 1$ の場合に tight binding model h に対するアンダーソン局在は 1985 年前後に

1. B. Simon, T. Wolff [35];
2. F. Delyon, Y. Lévy, B. Souillard [8];
3. J. Fröhlich, F. Martinelli, E. Scoppola, T. Spencer [10]

の 3 つのグループによりほぼ同時に, かつ独立に証明された. このうち [10] はそれに先立つ [11] の技巧（multiscale analysis と呼ばれる）を推し進めて Anderson 局在の証明を完成させており, [35], [8] における証明は [11] において得られていた Green 関数 $(h_\omega - z)^{-1}(x, y)$ の $|x - y|$ に関する減衰の評価と [22] における小谷氏のアイディア (Kotani's trick) を組み合わせたものである.

また 1994 年頃になって $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^d)$ におけるランダムな Schrödinger 作用素

$$H = -\Delta + V(x)\ , \quad \Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \tag{9}$$

に対しても Anderson 局在が証明されている. （文献については Stollmann [37] を参照されたい. ）ただしランダム・ポテンシャル $V(x)$ は, $\{v_x;\ x \in \mathbf{Z}^d\}$ を独立同分布な確率変数族として

$$V(x) = \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} v_y f(x - y) \tag{10}$$

という形の確率場である. これらの研究によると

1. random tight bindin model h において, （$\epsilon = 1$ として）W が十分大きければ, $d = 1$ の場合と同じことが成立する. すなわち h は確率 1 で点スペクトルのみを持ち, 対応する固有関数は指数関数的に減衰する. W が小さいときはスペクトル集合 $\sigma(h) = [-W - 2d, W + 2d]$ の端点付近において h は点スペクトルのみを持つ.
2. (9), (10) により与えられるランダム Schrödinger 作用素 H において, 各 v_x が $[0, W]$ 上の一様分布に従い, 関数 $f(x)$ は単位立方体 $[0, 1]^d$ の上で正の値を取り, $[0, 1]^d$ の外では $= 0$ とする. このとき H のスペクトル集合 $\sigma(H) = [0, \infty)$ の左端付近の部分は点スペクトルのみから成り, 対応する固有関数は遠方で指数関数的に減衰する.

将来の問題： tight binding model h において W が小さいとき, $\sigma(h) = [-W - 2d, W + 2d]$ の中ほどに連続スペクトルが現われるだろうか？いいかえると, 系の乱れが小さいとき h は散乱状態を持つだろうか？

Abrahams et al. [1] の「スケーリング理論」によれば, $d \leq 2$ の場合は W の大きさにかかわらず散乱状態は現われない. （実際 $d = 1$ の場合は厳密に証明されている. ）また $d \geq 3$ の場合, W が小さいときは「易動度端」(mobility edge) E_c が定まって, h は区間 $[-E_c, E_c]$

において連続スペクトルを持ち, この区間の外では点スペクトルを持つと予想されているが, 数学的には未解決である. H に対しても同様の予想があるがやはり未解決.

実験結果：アンダーソン局在は乱れを含む系における波動の伝播について広く成り立つと考えられており, 計算機実験 (Yoshino, Okazaki [41]) やレーザー光を用いた実験 (Wiersma et al. [40]) などにより確かめられている.

Dynamical Localization 近年になって, 波動関数の集中度を考慮した Anderson のもともとの主張により近い結果も得られている.

定理 1.5 ([12]) *random tight binding model* h_ω において W が十分大きく, h_ω が点スペクトルのみを持つ状況を考える. このとき任意のコンパクト区間 $I \subset \mathbf{R}$, 任意の $q > 0$ に対し, $\theta > 0$ を十分大きく選べば, $\psi \in \ell^2(\mathbf{Z}^d)$ が $|\psi(x)| \le \mathrm{const}.e^{-\theta|x|}$ を満たす限り

$$\sup_{t\ge 0}\left\| \, |X|^{q/2} E_\omega(I) e^{-ith_\omega}\psi \right\|^2 < \infty$$

が成り立つ. ただし $E_\omega(\cdot)$ は h_ω のスペクトル分解.

特に $\psi = \delta_0$ ならば任意の $\theta > 0$ に対して $|\psi(x)| \le \mathrm{const}.e^{-\theta|x|}$ となるから, 定理の主張は任意のコンパクト区間 $I \subset \mathbf{R}$ と任意の $q > 0$ に対し成り立つ. こうして, Anderson [2] の局在定理は数学的にほぼ正当化されたといってよい.

1.5 Ergodic family of operators

Schrödinger 作用素がランダム性を持てば必ず Anderson 局在を示すと決まったわけではない. ここでは数学的な研究の出発点としてランダムな Schrödinger 作用素の一般的な定式化を行う.

結晶格子に不純物が混ざることによる周期性の乱れを典型例として想定すると, 乱れの確率法則が空間的に一様であることを仮定するのが妥当と考えられる. これを踏まえて L.A. Pastur [29] は次のような定式化を行った. 以下, 簡単のためヒルベルト空間は $\mathcal{H} = \ell(\mathbf{Z}^d)$, 作用素は

$$(h_\omega\psi)(x) = \sum_{y:|y-x|=1} \psi(y) + V_\omega(x)\psi(x) \tag{11}$$

で定義される tight binding model とする. ただし $\{V_\omega(x);\ x \in \mathbf{Z}^d\}$ はある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ において定義された確率変数族である.

仮定 1 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ にエルゴード的な保測変換群 $\{T_x;\ x \in \mathbf{Z}^d\}$ が与えられていて $V_{T_x\omega}(y) = V_\omega(x+y)$ $(x, y \in \mathbf{Z}^d)$ が成り立つ. 詳しくいうと

(i) 各々の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して T_x は Ω からそれ自身への写像で, $T_0 = I$（恒等写像）, $T_{x+y} = T_x \circ T_y$ $(x, y \in \mathbf{Z}^d)$. 特に T_x は全単写であり $T_{-x} = T_x^{-1}$.

(ii) 任意の $x \in \mathbf{Z}^d$, 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $T_x^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ かつ $\mathbf{P}(T_x^{-1}(A)) = \mathbf{P}(A)$.

(iii) Ω の部分集合 $A \in \mathcal{F}$ が $\{T_x\}$-不変, すなわち $T_x^{-1}(A) = A, \forall x \in \mathbf{Z}^d$, ならば $\mathbf{P}(A) = 0$ または $= 1$.（エルゴード性）

条件 (iii) は次と同値である：

(iii)' $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上の $[-\infty, \infty]$-値可測関数 $F(\omega)$ が $\{T_x\}$-不変, すなわち $F \circ T_x = F, \forall x \in \mathbf{Z}^d$ ならば, 定数 $\overline{F}$ が存在して $\mathbf{P}(F(\omega) = \overline{F}) = 1$.

さて各々の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して

$$(U_x f)(\cdot) = f(\cdot - x) \ , \quad f \in \mathcal{H} \tag{12}$$

と定義すると $\{U_x;\ x \in \mathbf{Z}^d\}$ は $\mathcal{H}$ における unitary 作用素のなす群であり,

$$h_{T_x \omega} = U_{-x} h_\omega U_x \ , \quad \omega \in \Omega,\ x \in \mathbf{Z}^d \tag{13}$$

が成り立つ.

特に任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ に対して $h_{T_x\omega}$ と h_ω はユニタリ同値であり, そのスペクトルの性質はすべて一致する. 任意の開区間 $J = (a, b)$ に対して

$$A_J = \{\omega \in \Omega;\ J \cap \sigma(h_\omega) = \emptyset\} = \{\omega \in \Omega;\ E_\omega(J) = 0\} \ ;$$

$$B_J = \{\omega \in \Omega;\ \mathrm{Tr} E_\omega(J) < \infty\}$$

とおくと事象 A_J, B_J はいずれも $\{T_x\}-$ 不変だからその確率の値は 0 または 1. そこで

$$\Sigma = \left[\bigcup \{J;\ J = (a, b),\ a, b \in \mathbf{Q},\ P(A_J) = 1\} \right]^c \ ;$$

$$\Sigma_{ess} = \left[\bigcup \{J;\ J = (a, b),\ a, b \in \mathbf{Q},\ P(B_J) = 1\} \right]^c$$

とすると $\mathbf{P}$-a.e. $\omega \in \Omega$ に対して $\sigma(h_\omega) = \Sigma$, $\sigma_{ess}(h_\omega) = \Sigma_{ess}$ となる. h_ω の $\mathcal{H}_p, \mathcal{H}_c, \mathcal{H}_{ac}, \mathcal{H}_{sc}$ への制限を h_ω^δ $(\delta = p, c, ac, sc)$ とするとやはり $h_{T_x\omega} = U_{-x} h_\omega^\delta U_x$ が成立するから, これらの spectrum についても同じことが言え, したがって次の定理が得られる.

定理 1.6 (Pastur [29]) $\mathbf{R}$ の閉部分集合 $\Sigma, \Sigma_{ess}, \Sigma_{dis}, \Sigma_p, \Sigma_c, \Sigma_{ac}, \Sigma_{sc}$ が存在して $\mathbf{P}$-*a.e.* $\omega \in \Omega$ に対して

$$\sigma(h_\omega) = \Sigma,\ \sigma_{ess}(h_\omega) = \Sigma_{ess}, \sigma_{dis}(h_\omega) = \Sigma_{dis},$$

$$\sigma_p(h_\omega) = \Sigma_p,\ \sigma_c(h_\omega) = \Sigma_c,\ \sigma_{ac}(h_\omega) = \Sigma_{ac},\ \sigma_{sc}(h_\omega) = \Sigma_{sc}$$

となる.

証明　念のため最初の主張のみ証明する．

$(a,b) \subset \Sigma^c$ ならば $\mathbf{P}(A_{(a,b)}) = 1$, 従って確率 1 で $(a,b) \subset \sigma(h_\omega)^c$. $a < b$ を $(a,b) \subset \Sigma^c$ となるような有理数全体に渡って走らせれば, $\Sigma^c \subset \sigma(h_\omega)^c$ が確率 1 で成り立つ．一方, 可算集合 S が存在して $\Sigma = \overline{S}$ となることに注意する．$\lambda \in S$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mathbf{P}(A_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}) = 0$ である．$\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ としてみればわかるように, $\lambda \in S$ ならば確率 1 で $\lambda \in \sigma(h_\omega)$. 従って確率 1 で $S \subset \sigma(h_\omega)$. よって確率 1 で $\Sigma = \overline{S} \subset \sigma(h_\omega)$.

この定理は h_ω だけでなく, 抽象 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ におけるランダムな自己共役作用素 A_ω で, $\mathcal{H}$ におけるユニタリ作用素のある群 $\{U_x;\ x \in \mathbf{Z}^d\}$ に対して関係式

$$A_{T_x\omega} = U_{-x} A_\omega U_x$$

を満たすすべてのものに対して成立する ([17]).

定理 1.7 ([29]) $\{E_\omega(\cdot)\}$ を h_ω のスペクトル分解とするとき, 任意の区間 J に対して

$$\mathbf{P}(\mathrm{Tr} E_\omega(J) = \infty) = 1$$

または

$$\mathbf{P}(\mathrm{Tr} E_\omega(J) = 0) = 1$$

のいずれか一方のみ成り立つ．

証明　$E_\omega(d\lambda)$ を h_ω のスペクトル分解とすると任意の区間 J に対して

$$E_{T_x\omega}(J) = U_{-x} E_\omega(I) U_x \ , \quad x \in \mathbf{Z}^d$$

が成立する．そこで $F_J(\omega) := \mathrm{tr} E_\omega(J)$ とすると

$$F_J(T_x\omega) = \mathrm{tr}\{U_{-x} E_\omega(J) U_x\} = \mathrm{tr} E_\omega(J) = F_J(\omega) \ .$$

したがって **(iii)'** より定数 $M_J \in [-\infty, \infty]$ が存在して $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して $F_J(\omega) = M_J$ となる．ところが $M_J = 0$ または $= \infty$ である．実際, $\{\delta_x;\ x \in \mathbf{Z}^d\}$ が $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbf{Z}^d)$ の正規直交基底であることに注意すると

$$\begin{aligned} F_J(\omega) &= \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \langle \delta_x, E_\omega(J)\delta_x \rangle = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \langle U_x\delta_0, E_\omega(J) U_x \delta_0 \rangle \\ &= \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \langle \delta_0, U_{-x} E_\omega(J) U_x \delta_0 \rangle = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \langle \delta_0, E_{T_x\omega}(J)\delta_0 \rangle \ . \end{aligned}$$

ここで $m := \mathbf{E}[\langle \delta_0, E_\omega(J)\delta_0 \rangle]$ とすると, T_x が保測変換であることから $m > 0$ ならば

$$M_J = \mathbf{E}[F_J(\omega)] = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{E}[\langle \delta_0, E_{T_x\omega}(J)\delta_0 \rangle] = \infty \times m = \infty \ .$$

$m = 0$ ならば全く同様に $M_J = \infty \times m = \infty \times 0 = 0$.

系 1.8 各々の $\omega \in \Omega$ に対して h_ω の固有値の集合を Λ_ω, 有限多重度の固有値の集合を Λ^f_ω とすると, 任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$\mathbf{P}(\lambda \in \Lambda^f_\omega) = 0 \ .$$

証明　$J = [\lambda, \lambda] = \{\lambda\}$（一点集合）とすると定理 *1.7* より

$$\mathbf{P}(\lambda \in \Lambda^f_\omega) = \mathbf{P}(0 < \mathrm{Tr} E_\omega(\{\lambda\}) < \infty) = 0 \ .$$

系 1.9 $\mathbf{P}$-*a.e.* $\omega \in \Omega$ に対して $\sigma_{dis}(h_\omega) = \emptyset$.

証明　定理 *1.6* より, 孤立点のみからなる集合 Σ_{dis} が存在して $\sigma_{dis}(h_\omega) = \Sigma_{dis}$ が確率 1 で成り立つ. ここで $\Sigma_{dis} \neq \emptyset$ とすると $\lambda \in \Sigma_{dis}$ に対して

$$1 = \mathbf{P}(\lambda \in \sigma_{dis}(h_\omega) \leq \mathbf{P}(\lambda \in \Lambda^f_\omega) = 0$$

となり, 矛盾.

系 1.10 エルゴード的な *1* 次元の *tight binding model* h_ω については, 任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して $\mathbf{P}(\lambda \in \Lambda_\omega) = 0$.

証明　$d = 1$ のとき方程式 $h_\omega \psi = \lambda \psi$ の線形独立な解は高々 *2* つだから $\Lambda_\omega = \Lambda^f_\omega$.

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ において $\Omega = \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d} = \{\omega = (\omega_x)_{x \in \mathbf{Z}^d};\ \omega_x \in \mathbf{R}\}$ とし, $\mathcal{F}$ は $\mathbf{R}$ 上の Borel σ-field $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ の無限直積 $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbf{R})^{\otimes \mathbf{Z}^d}$, $\mathbf{P}$ は $\mathbf{R}$ 上の確率測度 $\nu(dv)$ の無限直積 $\mathbf{P} = \nu^{\otimes \mathbf{Z}^d}$ とする. $\omega = (\omega_x;\ x \in \mathbf{Z}^d) \in \Omega$ に対して $V_\omega(x) = \omega_x$ と定義すると $\{V_\omega(x)\}_x$ はそれぞれが確率分布 ν に従う独立な確率変数族となる. さらに $x \in \mathbf{Z}^d$, $\omega = (\omega_y;\ y \in \mathbf{Z}^d) \in \Omega$ に対して $T_x \omega = (\omega_{x+y})_y$ と定義すると T_x は明らかに保測変換, かつ以下に示すように $\{T_x\}$ はエルゴード的な保測変換群となり, $V_{T_x \omega}(y) = \omega_{x+y} = V_\omega(x+y)$ が成り立つ. 以上が仮定 1 をみたすランダム・ポテンシャルの典型例であるが, このように強いランダム性を持つもの以外に, $V(x)$ が周期的, あるいは概周期的な関数の場合もエルゴード的なランダム・ポテンシャルの一例とみなすことができる.

独立同分布確率変数族に対応する $\{T_x\}$ のエルゴード性の証明

有限集合 $F \subset \mathbf{Z}^d$ および $B_x \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $x \in F$ が存在して

$$C = \{\omega = (\omega_x) \in \Omega;\ \omega_x \in B_x,\ x \in F\}$$

と表される集合を cylinder set と呼ぶ. cylinder sets の全体を $\mathcal{C}$ とするとき, $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbf{R})^{\otimes \mathbf{Z}^d}$ は $\mathcal{C}$ を含む最小の $\sigma-$ 代数として定義される. また直積確率測度 $\mathbf{P} = \nu^{\otimes \mathbf{Z}^d}$ は任意の cylinder set $C = \{\omega = (\omega_x) \in \Omega;\ \omega_x \in B_x,\ x \in F\}$ に対して $\mathbf{P}(C) = \prod_{x \in F} \nu(B_x)$ となるようなただ一つの確率測度として定義される.（その存在は Kolmogorov の拡張定理により保障されている.）

任意の $A, B \in \mathcal{F}$ に対して

$$\lim_{|x|\to\infty} \mathbf{P}(A \cap (T_x B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \tag{14}$$

が成り立つことを示そう. A, B がともに cylinder sets ならば $|x|$ が十分大きいとき, A と B は独立, 従って $\mathbf{P}(A \cap (T_x B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ である. 有限個の cylinder sets の disjoint union として表される集合の全体を $\mathcal{A}$ とすると, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{F}$ を生成する有限加法族であるが, $A,\ B \in \mathcal{A}$ に対しても同じ理由で (14) が成り立つ. 最後に $A,\ B \in \mathcal{F}$ および $\varepsilon > 0$ を任意に与えると, $A',\ B' \in \mathcal{A}$ が存在して $\mathbf{P}(A \Delta A') < \varepsilon$, $\mathbf{P}(B \Delta B') < \varepsilon$ が成り立つ. このことから (14) が一般に成り立つことが容易に示される.

ここで $A \in \mathcal{F}$ が $\{T_x\}-$ 不変とすると

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap (T_x A)) = \lim_{|x|\to\infty} \mathbf{P}(A \cap (T_x A)) = \mathbf{P}(A)^2 ,$$

従って $\mathbf{P}(A) = 0$, または $= 1$ である.

1.6 Density of states measure

本小節の内容については W. Kirsch の講義録 [19] に行き届いた説明があるので, 詳細はそちらにゆずり, ここでは要点のみ述べる.

定義 1.11 $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上の局所有限な測度の列 $\{\nu_n\}$ が測度 ν に漠収束 *(vague convergence)* するとは, 任意の $\varphi \in C_0(\mathbf{R})$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\nu_n(dx) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\nu(dx)$$

が成り立つことである. ここで $C_0(\mathbf{R})$ は *compact support* を持つ連続関数の全体である.

$\mathbf{Z}^d$ の原点を中心とし, 辺の長さ $2L$, $L = 1, 2, \ldots$ の d 次元立方体を Λ_L とする. ($\Lambda_L = [-L, L]^d \cap \mathbf{Z}^d$.) h_ω は §1.5 の意味でエルゴード的とし, h_ω のスペクトル分解を $\{E_\omega(d\lambda)\}$, 各 $x \in \Lambda_L$ に対して δ_x に関する h_ω のスペクトル測度を μ_x^ω とする：

$$\mu_x^\omega(d\lambda) = \langle \delta_x, E_\omega(d\lambda)\delta_x \rangle .$$

さらに

$$\nu_L^\omega(d\lambda) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x\in\Lambda_L} \mu_x^\omega(d\lambda)$$

とする. エルゴード定理を用いて次の定理を示すのは難しくない：

定理 1.12 $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して, 測度の列 $\nu_L^\omega(d\lambda)$, $L = 1, 2, \ldots$ は測度

$$\nu(d\lambda) := \mathbf{E}[\langle \delta_0, E_\omega(d\lambda)\delta_0 \rangle]$$

に漠収束する. ν_L^ω, ν は実際には $\mathbf{R}$ 上の確率測度になっている.

定義 1.13 測度 ν を h_ω の *density of states measure* と呼ぶ. また $N(E) := \nu((-\infty, E])$ を *integrated density of states* と呼ぶ. 定理より $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して

$$\lim_{L\to\infty} \nu_L^\omega((-\infty, E]) = N(E) \tag{15}$$

が $N(\cdot)$ のすべての連続点 E において成り立つ.

エルゴード的な tight binding model の density of states measure ν については次が成立する：

定理 1.14 *(i)* $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して $\sigma(h_\omega) = \mathrm{supp}\ \nu$. ただし一般に $\mathbf{R}$ 上の測度 m に対して

$$\mathrm{supp}\ m := \{x \in \mathbf{R};\ m((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0,\ \forall\varepsilon > 0\}\ .$$

(ii) $N(E)$ は E について連続である. したがって *(15)* は実際はすべての E に対して成立する.

主張 (i) は tight binding model だけでなく, エルゴード的なランダムシュレーディンガー作用素に対しても成立するが, (ii) は h_ω が格子 $\mathbf{Z}^d$ 上の作用素であることに依存している.

さて定理 1.12 より任意の $x \in \mathbf{Z}^d$ と任意の実数 λ に対して

$$\nu(\{\lambda\}) = \mathbf{E}[\langle\delta_0, E_\omega(\{\lambda\})\delta_0\rangle] = \mathbf{E}[\langle\delta_0, E_{T_x\omega}(\{\lambda\})\delta_0\rangle] = \mathbf{E}[\langle\delta_x, E_\omega(\{\lambda\})\delta_x\rangle]$$

従って

$$\begin{aligned}\nu(\{\lambda\}) > 0 &\Leftrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{Tr}E_\omega(\{\lambda\}) > 0) > 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{Tr}E_\omega(\{\lambda\}) = \infty) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{P}(\lambda \text{ は多重度無限大の固有値}) = 1\ .\end{aligned}$$

定理 1.14 より tight binding model h_ω に対しては $\nu(d\lambda)$ は point mass を持たない. 従って定理 1.7 と合わせると, 任意の実数 λ に対して λ が多重度無限大の固有値である確率は 0 である. 一方 λ が有限多重度の固有値である確率も 0 だから tight binding model に対しては 1 次元の場合に限らず任意の実数 λ に対して $\mathbf{P}(\lambda \in \Lambda) = 0$ である.

次に χ_{Λ_L} を集合 Λ_L の定義関数として h_ω の Λ_L への制限 h_ω^L を

$$h_\omega^L = \chi_{\Lambda_L} h_\omega \chi_{\Lambda_L} \tag{16}$$

により定義する. h_ω^L は有限次元ヒルベルト空間 $\ell^2(\Lambda_L) = \mathbf{C}^{\Lambda_L}$ における自己共役作用素だからそのスペクトルは固有値 $\{E_j^\omega(\Lambda_L)\}_{j\geq 1}$ のみからなる.

定理 1.15 点 $a \in \mathbf{R}$ に集中した *unit mass* を $\delta_a(dx)$ で表し,

$$\tilde{\nu}(dx) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{j \geq 1} \delta_{E_j^\omega(\Lambda_L)}(dx) \tag{17}$$

とすると, $L \to \infty$ とするとき $\tilde{\nu}$ は ν に漠収束する. 特に各々の $E \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} \sharp\{j;\ E_j(\Lambda_L) \leq E\} = N(E)\ . \tag{18}$$

density of states measure $\nu(dE)$ が絶対連続のとき, その密度関数 $n(E)$ を h_ω の density of states という. $\nu(dE)$, $N(E)$ および $n(E)$ については

- $n(E)$ の滑らかさ, 解析性等に関する問題；
- スペクトル集合の下端付近における $N(E)$ の漸近挙動 (Lifschitz tail) に関する問題

等が調べられている. 詳しくは Kirsch [19], Veselić [38], Kirsch-Metzger [20] 等を参照されたい.

1.7 文献について

この講演で解説する内容は 1990 年代初頭までに殆ど完成された話題が中心である. この時点までの研究成果を集大成した研究書として Carmona-Lacroix [6], Pastur-Figotin [30] を挙げておく. また全般的な講義録として Carmona [5], Kirsch [18], Lang [23] も参照されたい. 比較的最近の研究成果を文献リストとともに要約した解説記事として Jitomirskaya [16] を挙げておく.

2 1次元 random tight binding model に対する Anderson 局在の証明

この節では 1 次元の場合に話を限り, random tight binding model が確率 1 で点スペクトルのみ持つことを証明する. 証明のための道具立ては

(i) multiplicative ergodic theorem (Oseledec's theorem)

(ii) Lyapunov 指数の正値性

(iii) Kotani's trick

(iv) Gilbert-Pearson の定理

の 4 つである. ランダム・ポテンシャルが絶対連続な分布を持つ独立同分布確率変数列からなる場合は, 上記の 4 つを組み合わせれば殆ど概念操作のみで Anderson 局在の証明が得られる.

2.1 Lyapunov 指数と multiplicative ergodic theorem

以下, $\ell^2(\mathbf{Z})$ 上の random tight binding model

$$(h_\omega\psi)(n) = \psi(n-1) + \psi(n+1) + V_\omega(n)\psi(n), \quad n \in \mathbf{Z} \tag{19}$$

を考える. 方程式 $h_\omega\psi = E\psi$ は 2 階の差分方程式であるが, それを

$$\begin{bmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E - V_\omega(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(n) \\ \psi(n-1) \end{bmatrix} \tag{20}$$

と書きなおすと, 初期条件 $\psi(0) = \psi_0$, $\psi(1) = \psi_1$ の下での $h_\omega\psi = E\psi$ の解は

$$\begin{bmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{bmatrix} = U_n^E(\omega) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

で与えられる. ただし

$$U_n^E(\omega) = \begin{cases} S_n(\omega)S_{n-1}(\omega)\cdots S_1(\omega) & (n > 0) \\ I & (n = 0) \\ S_{n+1}(\omega)^{-1}S_{n+2}(\omega)^{-1}\cdots S_0(\omega)^{-1} & (n < 0) \end{cases} \tag{22}$$

$$S_n(\omega) = \begin{bmatrix} E - V_\omega(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

である. この $U_n^E(\omega)$ を方程式 $h_\omega\psi = E\psi$ に対する transfer matrix と呼ぶことにする. ここで $\{V_n(\omega);\ n \in \mathbf{Z}\}$ は仮定 1 の意味でのエルゴード的な確率変数列とする. すなわち確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ にエルゴード的な保測変換群 $\{T^n;\ n \in \mathbf{Z}\}$ が与えられていて $V_n(\omega) = V_0(T^n\omega)$ が成り立つとする. このとき任意の整数 n, m に対して

$$U_{n+m}^E(\omega) = U_n^E(T^m\omega)U_m^E(\omega) \tag{24}$$

が成立する.

さて, 一般に複素 d 次正方行列 A に対して, そのノルム $\|A\|$ を

$$\|A\| = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

により定義しよう. （右辺の $\|\cdot\|$ は $\mathbf{C}^d$ におけるユークリッド・ノルム. ）

$$\|A\|^2 = \sup_{u\neq 0} \frac{\langle Au, Au\rangle}{\|u\|^2} = \sup_{u\neq 0} \frac{\langle u, A^*Au\rangle}{\|u\|^2}$$

だから非負定値エルミート行列 A^*A の固有値を

$$0 \le \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_d$$

とすると $\|A\| = \sqrt{\lambda_d}$ である．さらに $\det A = 1$ のとき $\det(A^*A) = 1 = \prod_{j=1}^d \lambda_j = 1$ だから $\|A\| \geq 1$ であり $d = 2$ のときは $\|A^{-1}\| = \|A\|$ も成り立つ．実際

$$\|A^{-1}\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|A^{-1}u\|}{\|u\|} = \left\{ \inf_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \right\}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{\lambda_2} = \|A\| \ .$$

一般に $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ だから (24) より

$$\|U^E_{n+m}(\omega)\| \leq \|U^E_n(T^m\omega)\|\|U^E_m(\omega)\| \ . \tag{25}$$

よって $Y_n(\omega) = \log \|U^E_n(\omega)\|$ とおくと $\det U^E_n(\omega) = 1$ より $Y_n(\omega) \geq 0$ であって

$$Y_{n+m}(\omega) \leq Y_n(T^m\omega) + Y_m(\omega) \ . \tag{26}$$

定義 2.1 保測変換群 $\{T^n;\ n \in \mathbf{Z}\}$ を備えた確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \{T^n\})$ 上の確率変数列 $\{X_k(\omega);\ k \geq 1\}$ が *sub-additive* とは

$$X_{n+m}(\omega) \leq X_n(T^m\omega) + X_m(\omega) \ , \quad n, m \geq 1 \tag{27}$$

が成り立つことである．

$\log \|U^E_n(\omega)\|$, $n = 1, 2, \ldots$ はこの意味で sub-additive である．

定理 2.2 (sub-additive ergodic theorem) $\{T^n\}$ はエルゴード的とする．$\{X_n(\omega)\}$ が *sub-additive* かつ $\mathbf{E}[|X_n|] < \infty$, $n = 1, 2, \ldots,$ のとき確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ X_n(\omega) = \gamma \tag{28}$$

が成り立つ．ただし

$$\gamma := \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n}\ \mathbf{E}[X_n]\ (\geq -\infty) \ . \tag{29}$$

この定理は Kingman によるものだが, その後いくつもの別証明が考案されている．（[28], [36] 等.）

sub-additive process の定義式 (27) における不等号を等号で置き換えると $X_n(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} X_1(T^j\omega)$ が得られる． またこのとき $\gamma = \mathbf{E}[X_1]$ となるから sub-additive ergodic theorem は古典的なエルゴード定理

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_1(T^j\omega) = \mathbf{E}[X_1] \tag{30}$$

の一般化であることがわかる．

sub-additive ergodic theorem を $\log \|U_n^E(\omega)\|$, $n=1,2,\dots$ に適用すると確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ \log \|U_n^E(\omega)\| = \gamma(E) \tag{31}$$

が成り立つ. ただし

$$\gamma(E) = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ \mathbf{E}[\log \|U_n^E(\omega)\|] \geq 0\ . \tag{32}$$

次に $n=1,2,\dots$ に対して $\tilde{U}_n^E(\omega) = U_{-n}^E(\omega)$ と定義すると (24) において $n+m=0$ として

$$\tilde{U}_n^E(\omega) = U_n(T^{-n}\omega)^{-1} \tag{33}$$

であることがわかる. $\tilde{T}^n = T^{-n}$ とおけば $\{\tilde{T}^n\}$ もまたエルゴード的な保測変換群で,

$$\tilde{U}_{n+m}^E(\omega) = \tilde{U}_n^E(\tilde{T}^m\omega)\tilde{U}_m^E(\omega) \tag{34}$$

が成り立つ. 一方

$$\begin{aligned}\inf_{n\leq -1} \frac{1}{|n|}\mathbf{E}[\log \|U_n^E\|] &= \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ \mathbf{E}[\log \|\tilde{U}_n^E\|] = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ \mathbf{E}[\log \|(U_n^E\circ \tilde{T}^n)^{-1}\|] \\ &= \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ \mathbf{E}[\log \|U_n^E\circ \tilde{T}^n\|] = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ \mathbf{E}[\log \|U_n^E\|] = \gamma(E)\end{aligned}$$

に注意. 先と同様に sub-additive ergodic theorem を適用して次の結果を得る.

定理 2.3 $\mathbf{P}$-*a.e.* $\omega \in \Omega$ に対して

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \|U_n^E(\omega)\| = \gamma(E)\ . \tag{35}$$

右辺に現れる定数を *Lyapunov exponent* と呼ぶ.

定理 2.4 (multiplicative ergodic theorem [31], [33]) 定理 *2.3* の結論を成り立たせる $(\omega, E) \in \Omega\times\mathbf{R}$ に対してベクトル $\Theta_{\omega,E}^{\pm} \in \mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ が存在して次をみたす：

(i) $v\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ が $\Theta_{\omega,E}^{+}$ [resp. $\Theta_{\omega,E}^{-}$] と平行ならば

$$\lim_{n\to+\infty[\text{resp. } -\infty]} \frac{1}{|n|} \log \|U_n(\omega)v\| = -\gamma(E)\ ; \tag{36}$$

(ii) $v\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ が $\Theta_{\omega,E}^{+}$ [resp. $\Theta_{\omega,E}^{-}$] と線形独立ならば

$$\lim_{n\to+\infty[\text{resp. } -\infty]} \frac{1}{|n|} \log \|U_n(\omega)v\| = \gamma(E)\ ; \tag{37}$$

定理 2.4 は本質的に deterministic な結果である. なお, ここに引用したのは multiplicative ergodic theorem を 2×2 行列の場合に限ったもので, ランダム行列の次数が上がればそれに応じた個数の Lyapunov 指数とベクトル $\Theta_{\omega,E}^{(j)}$, $j=1,2,\dots$ が定理に現れる.

2.2 Ishii-Pastur の定理（絶対連続スペクトルの不在）

h_ω , h_ω^{ac} のスペクトル分解をそれぞれ $\{E_\omega(d\lambda)\}$, $\{E_\omega^{ac}(d\lambda)\}$ とする. Anderson 局在の一歩手前の結果として次が成り立つ.

定理 2.5 (Pastur [29]) *Borel* 集合 $B \subset \mathbf{R}$ のいたる所で $\gamma(E) > 0$ となるならば $\mathbf{P}$-*a.e.*ω に対して $E_\omega^{ac}(B) = 0$. すなわち h_ω のスペクトルは確率 1 で B に絶対連続スペクトルを持たない.

小谷理論 ([21], [34]) によれば, 逆に集合 $\{E \in \mathbf{R};\ \gamma(E) = 0\}$ が正のルベーグ測度を持つならば, そこには h_ω の絶対連続スペクトルが存在する. こちらは Ishii-Pastur の定理よりもはるかに深い話である.

定義 2.6 A は *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ における自己共役作用素, $\{E(d\lambda)\}$ をそのスペクトル分解とする. $\mathbf{R}$ 上の測度 $\sigma(d\lambda)$ が A のスペクトル測度であるとは, 任意の *Borel* 集合 $C \subset \mathbf{R}$ に対して

$$\sigma(C) = 0 \iff E(C) = 0$$

となることである.

$\{e_n\}$ が $\mathcal{H}$ の正規直交基底のとき, 例えば

$$\sigma(B) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \langle e_n, E(B)e_n \rangle$$

と定義すれば σ はスペクトル測度になる.

定義 2.7 $\mathbf{Z}^d$ 上の関数 ψ が多項式的に有界とは, 定数 $C > 0$, $k > 0$ が存在して

$$|\psi(x)| \le C(1 + \|x\|)^k\ , \quad n \in \mathbf{Z}^d \tag{38}$$

となることである.

命題 2.8 h は *(11)* で定義される d 次元の *tight binding model*, $\sigma(d\lambda)$ はそのスペクトル測度とすると, σ-*a.e.* $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して $h\psi = \lambda\psi$ は多項式的に有界な解 $\psi \neq 0$ を持つ.

証明については [19] を見られたい.

さて h_ω を 1 次元のエルゴード的な random tight binding model として, $\Omega \times B$ の 2 つの部分集合

$$\mathcal{A}_1 := \Big\{(\omega, E) \in \Omega \times B;\ \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \|U_n^E(\omega)\| = \gamma(E) > 0\Big\} \tag{39}$$

$$\mathcal{A}_2 := \{(\omega, E) \in \mathcal{A}_1;\ \Theta^+_{\omega,E} \text{ と } \Theta^-_{\omega,E} \text{ は平行 }\} \tag{40}$$

を考える. $\mathcal{A}^\omega_j := \{E;\ (\omega, E) \in \mathcal{A}_j\}$ $(j = 1, 2)$ を $\mathcal{A}_j$ の ω での切り口とすると, $E \in \mathcal{A}^\omega_2$ に対して方程式 $h_\omega \psi = E\psi$ の初期値 $u =^t [\psi_0, \psi_1] \neq 0$ を $\Theta^\pm_{\omega,E}$ と平行にとるとき, 定理 2.4 より

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \|U^E_n(\omega)u\| = -\gamma(E) < 0 \tag{41}$$

となり $\psi(n)$ は $n \to \pm\infty$ において指数関数的に減衰する. このとき特に $\psi \in \ell^2(\mathbf{Z})$ となるから E は h_ω の固有値. 特に $\mathcal{A}^\omega_2$ は高々可算集合である. このことと定理 2.3 および Fubini の定理より

$$|B \setminus (\mathcal{A}^\omega_1 \setminus \mathcal{A}^\omega_2)| = 0\ .$$

一方 $E \in \mathcal{A}^\omega_1 \setminus \mathcal{A}^\omega_2$ とすると方程式 $h_\omega \psi = E\psi$ の任意の初期値 $u =^t [\psi_0, \psi_1] \neq 0$ は $\Theta^+_{\omega,E}$, $\Theta^-_{\omega,E}$ の少なくとも一方と線形独立となり, したがって

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|n|} \log \|U^E_n(\omega)u\| = \gamma(E) > 0$$

または

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{|n|} \log \|U^E_n(\omega)u\| = \gamma(E) > 0$$

の少なくとも一方が成立する. したがって σ_ω を h_ω のスペクトル測度とすると命題 2.8 より $\sigma_\omega(\mathcal{A}^\omega_1 \setminus \mathcal{A}^\omega_2) = 0$ でなければならない. よって $\sigma_\omega|_B$ は確率 1 で Lebesgue 測度 0 の集合 $B \setminus (\mathcal{A}^\omega_1 \setminus \mathcal{A}^\omega_2)$ に集中していることになり, したがって B に絶対連続成分を持たない. これで定理 2.5 が示された.

定理 2.5 はいうまでもなく集合 $\{E \in \mathbf{R};\ \gamma(E) > 0\}$ の Lebesgue 測度が正の場合にのみ意味を持つ. ランダム行列の積のノルムの指数増大度としての Lyapunov 指数がいつ正になるかは一般には難しい問題であるが, 今考えている 1 次元 tight binding model の場合には Furstenberg の定理の特別な場合として次が知られている.

定理 2.9 ([3]) *ランダム・ポテンシャル $\{V_\omega(n);\ n \in \mathbf{Z}\}$ が独立同分布な確率変数列から成り, $\mathbf{E}[\log(1 + |V_\omega(n)|] < \infty$, かつ $V_\omega(n)$ の分布が 1 点に退化しないならば, すべての $E \in \mathbf{R}$ に対して $\gamma(E) > 0$ である.*

以下 h_ω に対する Anderson 局在の証明にあたってこの定理の条件が成り立つことを仮定する. このとき特に $\mathcal{A}_1$ の定義において $B = \mathbf{R}$ とすることができる.（実は再び小谷理論 ([21], [34]) から, ランダムポテンシャル $\{V_\omega(n)\}_n$ が非決定的（分布が 1 点に退化しない独立同分布確率変数列の場合は明らかにそうであるが）な場合は常に $\gamma(E) > 0$ がルベーグ測度に関して殆どすべての $E \in \mathbf{R}$ に対して成り立つ. 我々の目的のためにはこれでも十分である.）

さて仮に

$$\mathbf{P}\text{−a.e. } \omega \text{ に対して } \sigma_\omega(\mathbf{R} \setminus \mathcal{A}^\omega_1) = 0 \tag{42}$$

が示されたとしよう．すると σ_ω について殆どすべての E に対してベクトル $\Theta^+_{\omega,E}$ および $\Theta^-_{\omega,E}$ が存在して定理 2.4 の結論が成り立つのであるが, 同時に方程式 $h_\omega\psi = E\psi$ は多項式的に有界な解を持たなければならないから $\Theta^+_{\omega,E}$ と $\Theta^-_{\omega,E}$ とは平行でなければならない．ところがこのとき, 既に見たように $h_\omega\psi = E\psi$ は $n \to \pm\infty$ において指数関数的に減衰する解を持つ．よって σ_ω-a.e. E は h_ω の固有値であり, 対応する固有関数は指数関数的に減衰する．以上が §1.4 で触れた R. Carmona のアイディアであり, 彼は (42) に相当する条件が実際に成り立つことを Goldsheidt, Molchanov, Pastur によるモデル (8) に対して証明した．その後小谷氏 [22] は (42) を示すための汎用性の高い方法を発見した．次の小節でそれを説明する．

2.3 Kotani's trick による Anderson 局在の証明

１次元 tight binding model（2 階差分作用素）に対しては, 2 階常微分作用素に対する Weyl 理論のアナロジーが成立する．特に次が成り立つ：

命題 2.10 h のスペクトル測度は $E(d\lambda)$ を h のスペクトル分解として

$$\sigma(d\lambda) = \langle\delta_0, E(d\lambda)\delta_0\rangle + \langle\delta_1, E(d\lambda)\delta_1\rangle =: \sigma_0(d\lambda) + \sigma_1(d\lambda) \tag{43}$$

で与えられる．

証明 ([3]) 数列 $\{p_n(\lambda)\}_n$, $\{q_n(\lambda)\}_n$ は方程式 $h\psi = \lambda\psi$ の解でそれぞれ初期条件

$$p_0(\lambda) = 0,\ p_1(\lambda) = 1\ ;\quad q_0(\lambda) = 1,\ q_1(\lambda) = 0$$

を満たすものとする．$p_n(\lambda)$, $q_n(\lambda)$ は λ の多項式である．まず次が成立することに注意：

$$p_n(h)\delta_1 + q_n(h)\delta_0 = \delta_n\ ,\quad n \in \mathbf{Z}\ . \tag{44}$$

実際 $n = 0, 1$ に対しては *(44)* は直接確かめられ, $n > 1$, $n < 0$ については

$$h\delta_n = \delta_{n+1} + \delta_{n-1} + V(n)\delta_n \tag{45}$$

を用いて帰納的に証明される．

　さて $\sigma(B) = 0$ とすると, σ の定義 *(44)* により

$$\|E(B)\delta_0\|^2 = \langle\delta_0, E(B)\delta_0\rangle \le \sigma(B) = 0\ ,$$

$$\|E(B)\delta_1\|^2 = \langle\delta_1, E(B)\delta_1\rangle \le \sigma(B) = 0\ .$$

従って任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して

$$E(B)\delta_n = E(B)\{p_n(h)\delta_1 + q_n(h)\delta_0\} = p_n(h)E(B)\delta_1 + q_n(h)E(B)\delta_0 = 0\ .$$

よって $E(B) = 0$ である．逆に $E(B)$ ならば $\sigma(B) = 0$ であることは明らか．

定理 2.11 ([22]) *random tight binding model* のポテンシャル $\{V_\omega(n);\ n\in\mathbf{Z}\}$ は定理 *2.9* の条件を満たすとし, さらに各々の $V_\omega(n)$ の分布は有界な確率密度関数 $\rho(v)$ を持つとする. 確率変数族 $\{V_\omega(n);\ n\in\mathbf{Z}\setminus\{j\}\}$ が生成する $\mathcal{F}$ の *sub-σ field* を $\mathcal{G}_j$ $(j=0,1)$, $\mathcal{G}=\mathcal{G}_0\cap\mathcal{G}_1$ とすると確率 1 で

$$\mathbf{E}_\omega^{\mathcal{G}}[\sigma^{\cdot}(d\lambda)]\le 2\|\rho\|_\infty d\lambda\ . \tag{46}$$

証明　*(46)* の左辺の条件付き平均は, $n\in\mathbf{Z}\setminus\{0,1\}$ に対する $V_\omega(n)$ の実現値を固定した上で, $V_\omega(0)$, $V_\omega(1)$ のランダム性のみを用いて $\sigma^\omega(d\lambda)=\sigma_0^\omega(d\lambda)+\sigma_1^\omega(d\lambda)$ の平均をとったものである. したがって定理を示すには, $\sigma_0^\omega(d\lambda)$, $\sigma_1^\omega(d\lambda)$ をそれぞれ $V_\omega(0)$, $V_\omega(1)$ のランダム性により平均したものが *Lebesgue* 測度の定数倍で抑えられることを示せばよい. そのために

$$\tilde{h}_\omega=h_\omega-V_\omega(0)\delta_0$$

とおくと *resolvent identity* により, $z\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ に対して

$$(h_\omega-z)^{-1}=(\tilde{h}_\omega-z)^{-1}-(h_\omega-z)^{-1}V_\omega(0)\delta_0(\tilde{h}_\omega-z)^{-1}\ . \tag{47}$$

したがって

$$g(z)=\langle\delta_0,(h_\omega-z)^{-1}\delta_0\rangle\ ,\quad \tilde{g}(z)=\langle\delta_0,(\tilde{h}_\omega-z)^{-1}\delta_0\rangle \tag{48}$$

とおくと

$$g(z)=\tilde{g}(z)-V_\omega(0)g(z)\tilde{g}(z)\ , \tag{49}$$

したがって

$$g(z)=\frac{\tilde{g}(z)}{1+V_\omega(0)\tilde{g}(z)}=\frac{1}{V_\omega(0)-(-\tilde{g}(z)^{-1})}\ . \tag{50}$$

ここで $z=\xi+i\varepsilon$, $\varepsilon>0$ とすると $\Im\tilde{g}(z)>0$ より $\Im(-\tilde{g}(z)^{-1})>0$. そこで $-\tilde{g}(z)^{-1}=a+bi$ とおくと $b>0$ であり, a, b は $\{V_\omega(n);\ n\neq 0\}$ の可測関数となる. そこで

$$\begin{aligned}\Im g(z)\ &=\ \Im\int\frac{\sigma_0^\omega(d\lambda)}{\lambda-z}=\int\frac{\varepsilon}{(\lambda-\xi)^2+\varepsilon^2}\ \sigma_0^\omega(d\lambda)\\ &=\ \Im\left(\frac{1}{V_\omega(0)-(-\tilde{g}(z)^{-1})}\right)=\frac{b}{(V_\omega(0)-a)^2+b^2}\end{aligned}$$

の両辺を $V_\omega(0)$ について積分すると

$$\begin{aligned}\int\frac{\varepsilon}{(\lambda-\xi)^2+\varepsilon^2}\ \mathbf{E}_\omega^{\mathcal{G}_0}[\sigma_0^{\cdot}(d\lambda)]\ &=\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{b}{(v-a)^2+b^2}\ \rho(v)dv\\ &\le\ \pi\|\rho\|_\infty=\int\frac{\varepsilon}{(\lambda-\xi)^2+\varepsilon^2}\|\rho\|_\infty d\lambda.\end{aligned}$$

この不等式が任意の $\xi\in\mathbf{R}$, $\varepsilon>0$ について成立することから

$$\mathbf{E}_\omega^{\mathcal{G}_0}[\sigma_0^{\cdot}(d\lambda)]\le\|\rho\|_\infty d\lambda \tag{51}$$

が得られ, 同様の議論により

$$\mathbf{E}_\omega^{\mathcal{G}_1}[\sigma_1^{\cdot}(d\lambda)]\le\|\rho\|_\infty d\lambda \tag{52}$$

も得られる.

命題 2.12 ([22]) $\Omega \times \mathbf{R}$ の部分集合 D が直積 σ 代数 $\mathcal{G} \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に属するならば

$$\iint_D \mathbf{P}(d\omega)\sigma^\omega(d\lambda) = \iint_D \mathbf{P}(d\omega)\mathbf{E}^{\mathcal{G}}_\omega[\sigma^\cdot(d\lambda)] \ . \tag{53}$$

証明 $D = B \times C$, $B \in \mathcal{G}$, $C \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ の場合は

$$\begin{aligned}&\iint_{B\times C} \mathbf{P}(d\omega)\sigma^\omega(d\lambda) = \int_B \sigma^\omega(C)\mathbf{P}(d\omega)\\ = \ &\int 1_B((\omega_x)_{x\neq 0,1}) \int \sigma^\omega(C)\mathbf{P}((V_\omega(0), V_\omega(1)) \in dv_0 dv_1)\end{aligned}$$

からわかる. また D がこのような直積集合の *disjoint union* の場合も主張は成立する. よって *monotone class lemma* によりすべての $D \in \mathcal{G} \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して等式は成立する.

定理 2.13 (Anderson 局在) ランダム・ポテンシャル $\{V_\omega(n)\}$ が定理 *(2.11)* の条件をみたすならば, 確率 1 で h_ω は点スペクトルのみを持ち, 対応する固有関数は指数関数的に減衰する.

証明 h_ω の代わりに

$$\bar{h}_\omega := h_\omega - V_\omega(0)\delta_0 - V_\omega(1)\delta_1 \tag{54}$$

を考え, 方程式 $\bar{h}_\omega\psi = E\psi$ に対する *transfer matrix* を $\bar{U}^E_n(\omega)$ とすると

$$\mathcal{A}_1 = \left\{(\omega, E);\ \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \|\bar{U}^E_n(\omega)\| = \gamma(E) > 0\right\} \tag{55}$$

であることは容易にわかる. これより $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{G} \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$ が示される. 条件より $\gamma(E) > 0$ がすべての $E \in \mathbf{R}$ について成り立つから *Fubini* の定理より $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して $\mathbf{R} \setminus \mathcal{A}^\omega_1$ の *Lebesgue* 測度は 0. よって命題 *2.12* より

$$\int_\Omega \int_{\mathbf{R}\setminus\mathcal{A}^\omega_1} \sigma^\omega(d\lambda) = \int_\Omega \int_{\mathbf{R}\setminus\mathcal{A}^\omega_1} \mathbf{E}^{\mathcal{G}}_\omega[\sigma^\cdot(d\lambda)] = 0 \ . \tag{56}$$

前小節の議論から結論が得られる.

2.4 Gilbert-Pearson の定理の応用

今までの議論から 1 次元 tight binding model h のスペクトルの性質は方程式 $h\psi = E\psi$ の解の遠方での挙動によりほぼ決まることがわかった. このことを一般的に明らかにしたのが Gilbert と Pearson の定理 ([13], [14]) である. 彼らは 1 次元の Schrödinger 作用素 $-d^2/dx^2 + V(x)$ を扱ったが, tight binding model h に対しても同様の結果が得られる.

定義 2.14 方程式 $h\psi = E\psi$ の非自明解 ψ^s が $+\infty$ $[-\infty]$ において *subordinate* とは方程式 $h\psi = E\psi$ の他の任意の線形独立な解に対して

$$\lim_{N\to+\infty[-\infty]} \frac{\|\psi^s\|_N}{\|\psi\|_N} = 0 \tag{57}$$

が成り立つことである. ただし $N > 0$ か $N < 0$ に応じて

$$\|\psi\|_N^2 := \sum_{n=1}^{N} |\psi(n)|^2 \qquad \text{または} \qquad = \sum_{n=-N}^{-1} |\psi(n)|^2 \tag{58}$$

とする.

tight binding model h は任意のポテンシャル $\{V(n)\}_n$ に対して自己共役作用素になるから, Weyl 理論により任意の複素数 z に対して $h\psi = z\psi$ の非自明解で $+\infty$, $-\infty$ において 2 乗総和可能なもの ψ_+, ψ_- はそれぞれ定数倍を除いて一意である. （境界 $\pm\infty$ がそれぞれ「極限点型」であることと h の自己共役性が同値であることによる. ）したがって $h\psi = z\psi$ の非自明解が $+\infty$ $[-\infty]$ において 2 乗総和可能ならばsubordinate である.

定義 2.15 $m(d\xi)$ を $\mathbf{R}$ 上の *Lebesgue* 測度, $\nu(d\xi)$ を $\mathbf{R}$ 上の任意の測度とする. *Borel* 集合 S が ν の *minimal support* であるとは $\nu(\mathbf{R}\setminus S) = 0$ かつ, $\nu(A) = 0$ をみたす任意の *Borerl* 集合 $A \subset S$ に対して $m(A) = 0$ となることである. S は $(m+\nu)$- *null sets* の違いを除いて一意に定まる.

定理 2.16 ([13], [14]) *1* 次元 *tight binding model* h のスペクトル測度 $\sigma(d\xi)$ の絶対連続部分と特異部分への *Lebesgue* 分解を $\sigma = \sigma_{ac} + \sigma_s$ とし, M_{ac}, M_s をそれぞれ σ_{ac}, σ_s の *minimal support* とすると *m-null sets,* あるいは $(m+\sigma_s)$*-null sets* の違いを除いて

(i) $M_{ac} = \{E \in \mathbf{R};\ h\psi = E\psi$ は $+\infty$ における *subordinate solution* を持たないか,
または $-\infty$ における *subordinate solution* を持たない $\}$;

(ii) $M_s = \{E \in \mathbf{R};\ h\psi = E\psi$ は $+\infty$, $-\infty$ において同時に *subordinate*
となる非自明解を持つ $\}$.

以下定理 2.11 の結論が成り立つことを仮定する. このためには例えば 2 次元確率変数 $(V_\omega(0), V_\omega(1))$ が $\{V_\omega(n);\ n \in \mathbf{Z}\setminus\{0,1\}\}$ と独立で, さらに有界な周辺密度関数を持てばよい.

定理 2.17 ([24]) 定理 *2.11* の結論が成り立つとすると, 任意の区間 $J \subset \mathbf{R}$ に対して次が成立する：

(i) *m-a.e.* $E \in J$ に対して

$\mathbf{P}(h_\omega\psi = E\psi$ の非自明解 ψ_+, ψ_- が存在して $\sum_1^\infty |\psi(n)|^2 < \infty$,
$\sum_{-\infty}^{-1} |\psi(n)|^2 < \infty) = 1$

となるならば, $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して h_ω は J において点スペクトルのみを持つ.

(ii) m-*a.e.* $E \in J$ に対して

$\mathbf{P}(h_\omega \psi = E\psi$ は $-\infty$ における *subordinate solution* を持たないか, または
$+\infty$ における *subordinate solution* を持たない$) = 1$

となるならば $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して h_ω は J において絶対連続スペクトルのみを持ち, J 上の殆どいたるところで $\sigma_\omega(dE)/dE > 0$.

(iii) m-*a.e.* $E \in J$ に対して

$\mathbf{P}(h_\omega \psi = E\psi$ の非自明解 ψ_+, ψ_- が存在してそれぞれ $+\infty$, $-\infty$
において *subordinate* かつ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\psi(n)|^2 = \infty) = 1$

となるならば $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して h_ω は J において特異連続スペクトルのみを持つ.

補題 2.18 $\Omega \times \mathbf{R}$ の *4* つの部分集合

$$\mathcal{S}_1^{\pm} := \{(\omega, E);\ h_\omega \psi = E\psi \text{ は } +\infty\ [-\infty] \text{ において } \textit{square summable} \text{ な解を持つ}\}$$

$$\mathcal{S}_2^{\pm} := \{(\omega, E);\ h_\omega \psi = E\psi \text{ は } +\infty\ [-\infty] \text{ において } \textit{subordinate} \text{ な解を持つ}\}$$

はすべて $\mathcal{G} \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に属する.

この補題の証明は省略する.

証明 (定理 2.17) (i) 条件と *Fubini* の定理より $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して $J \setminus (\mathcal{S}_1^+ \cap \mathcal{S}_1^-)^\omega$ の *Lebesgue* 測度は 0. したがって補題 *2.18* と命題 *2.12* より $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して $\sigma^\omega|_J$ は $(\mathcal{S}_1^+ \cap \mathcal{S}_1^-)^\omega$ に集中している. *square summable* な解は必ず *subordinate* だから定理 *2.16 (i)* より σ^ω は J において特異である. すると定理 *2.16 (iii)* より ψ_+ と ψ_- とは線形従属でなければならない. したがって σ_ω-*a.e.* $E \in J$ に対して $h_\omega \psi = E\psi$ は $\ell^2(\mathbf{Z})$ に属する解を持ち, E は h_ω の固有値となる.

(ii) 上と同様の議論により, $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して $\sigma_\omega((\mathcal{S}_2^+ \cap \mathcal{S}_2^-)^\omega) = 0$ である. したがって定理 *2.16 (ii)* より σ_ω は J において特異成分を持たない. 主張の後半は定理 *2.16 (i)* と *Fubini* の定理から得られる.

(iii) やはり同様の議論により $\mathbf{P}$-*a.e.* ω に対して $\sigma_\omega|_J$ は J において特異となり, $J \setminus [(\mathcal{S}_1^+ \cap \mathcal{S}_1^-)^\omega]$ に集中している. よって σ_ω-*a.e.* $E \in J$ は h_ω の固有値ではあり得ない.

定理 2.17 を用いると Anderson 局在の別証明が得られる. 実際, 任意の $E \in \mathbf{R}$ に対して $\gamma(E) > 0$ だから, 方程式 $h_\omega \psi = E\psi$ は $\mathbf{P}$-a.e. ω に対して $+\infty$ において指数関数的に減衰する解と $-\infty$ において指数関数的に減衰する解をそれぞれ持つ. したがって定理 2.17 (i) の条件が成り立ち, h_ω は点スペクトルのみを持つ. この証明には命題 2.8 が用いられていないことに注意されたい.

定理 2.17 は tight binding model だけでなく, Kotani's trick を保障する条件の下で連続型の 1 次元ランダムシュレーディンガー作用素に対しても成立する ([24]). その応用例として一様電場を持つランダムシュレーディンガー作用素に対する次の結果を紹介する：

定理 2.19 ([24]) *(i)* H_ω は *(8)* で定義されたランダムシュレーディンガー作用素として $H_\omega^F = H_\omega - Ft$ を考える．すると $F \neq 0$ なる限り確率 1 で $\sigma(H_\omega^F) = (-\infty, \infty)$, かつ H_ω^F は絶対連続スペクトルのみを持つ．

(ii) $\{B_\omega(t)\}$ は標準 *Brown* 運動とする．（その形式的な微分 $\{B'_\omega\}$ は *white noise* と考えられる．）$\kappa > 0$, $F \geq 0$ として境界条件

$$u(0)\cos\theta + u'(0)\sin\theta = 0$$

の下で $L^2([0,\infty))$ における作用素

$$H_\omega^{F,\theta} = -\frac{d^2}{dt^2} + \kappa B'_\omega(t) - Ft$$

を考えると，

(0) 確率 1 で $\sigma(H_\omega^{F,\theta}) = (-\infty, \infty)$;

(i) $F = 0$ ならば $H_\omega^{F,\theta}$ は確率 1 で点スペクトルのみを持ち，対応する固有関数は指数関数的に減衰する；

(ii) $0 < F < \kappa^2/2$ ならば $H_\omega^{F,\theta}$ は確率 1 で点スペクトルのみを持ち，対応する固有関数 $u(x)$ は任意の $\delta > 0$ に対して次の評価を満たす：

$$u(x)^2 = \mathcal{O}\Big(x^{-(1/2)-(\kappa^2/4F)+\delta}\Big)\ , \quad x \to +\infty\ ,$$

$$\liminf_{x\to+\infty} x^{(1/2+(\kappa^2/4F)+\delta} \int_x^{x+1} |u(t)|^2 dt > 0\ .$$

(iii) $F \geq \kappa^2/2$ ならば $H_\omega^{F,\theta}$ は特異連続スペクトルのみを持つ．

3　スペクトル統計

density of states $n(E) = N'(E)$（§1.6 参照）が存在すると仮定しよう．ΔE をエネルギー軸の微小区間とすると定理 1.15 より L が大きいとき

$$\sharp\{j;\ E_j^\omega(\Lambda_L) \in \Delta E\} \approx |\Lambda_L| n(E) \Delta E\ .$$

したがって h_ω の隣接する固有値の間隔 Δ は

$$\Delta \approx \frac{1}{n(E)|\Lambda_L|} + \text{揺らぎ}$$

となるであろう．この揺らぎの部分を特徴づけようというのがスペクトル統計（あるいは準位統計）の問題意識である．その一つのアプローチとして，h_ω のスペクトル Σ の内部にある 1 点 E を固定して

$$\xi_j^L = \xi_j^L(E,\omega) = |\Lambda_L|(E_j^\omega(\Lambda_L) - E) \tag{59}$$

のようにスケールした固有値を考える．点 ξ_j の各々に unit mass を置いて得られるランダム測度（point process）

$$\xi_\omega^L(dx) = \sum_j \delta_{\xi_j^L}(dx) \tag{60}$$

の $L \to \infty$ での確率法則を特徴づけられればよい．これについては Molchanov の先駆的な結果がある：

定理 3.1 ([27]) *(8)* で定義された *1* 次元ランダムシュレーディンガー作用素 H_ω を固定端境界条件の下に区間 $[0, L]$ に制限したものを H_ω^L, そのスペクトルを $\{E_j^L(\omega)\}$ とし, 上記のように $\xi_\omega(dx)$ を定義すると, 任意の自然数 m, 任意の互いに素な有界区間 $I_1, \ldots, I_m$, 任意の非負整数 $k_1, \ldots, k_m \geq 0$ に対して

$$\lim_{L\to\infty} \mathbf{P}(\xi_\omega^L(I_j) = k_j,\ j = 1, \ldots, m) = \prod_{j=1}^m e^{-n(E)|I_j|}\ \frac{(n(E)|I_j|)^{k_j}}{k_j!}\ . \tag{61}$$

すなわち *point process* $\xi_\omega^L(dx)$ は *Poisson point process* に法則の意味で収束する．（H_ω に対しては連続な *density of states* が存在することが知られている．）

この定理の背景をなす直観的描像は明白である．まず $\ell_L \to \infty$ かつ $\ell_L = o(L)$ なるスケール ℓ_L を適当にとり, 区間 $[0, L]$ を長さ ℓ_L の区間 $D_1, \ldots, D_N$ に分割する．Molchanov [26] は H_ω^L の固有関数が, $[0, L]$ にほぼ一様分布する「局在の中心」のまわりに指数関数的に減衰することを示していた．このことから大部分の固有関数は区間 D_j の内部に中心を持ち, D_j の境界では小さくなっていると考えられる．従って固定端境界条件の下に H_ω を D_j に制限したものを $H_\omega^{D_j}$ とすると $H_\omega^{D_j}$ たちは統計的にほぼ独立であり, H_ω^L は $H_\omega^{D_j}$, $j = 1, \ldots, N$ の直和で近似され, したがってその spectrum は $H_\omega^{D_j}$ の spectrum の重ね合わせで近似される．これは Poisson point process が得られる典型的な状況である．ただし, 極限分布を Poisson と同定するためには後述するような付加的な評価が必要である．

Molchanov の定理には連続性ゆえの難しさもあって, その証明は極めて技巧的である．Anderson 局在に関するその後の理論の進歩を取り入れると格子上の tight binding model に対しては同様の結果が比較的初等的な議論で証明される：

定理 3.2 ([25]) h_ω^L は d 次元 *tight binding model* の領域 $\Lambda_L = [0, L]^d$ への制限, $\{E_j^L(\omega)\}_j$ をその *spectrum* とする．ランダム・ポテンシャル $\{V_\omega(x)\}_{x\in\mathbf{Z}^d}$ は独立同分布な確率変数族とし, 各々の $V_\omega(x)$ の分布は有界な密度関数 $\rho(v)$ を持ち, さらにその上界 $\|\rho\|_\infty$ は十分小さいとする（*large disorder*）．このとき, h_ω の *spectrum* の内点 E で $n(E) = N'(E)$ が存在するものを固定し, *(59), (60)* のように ξ_ω^L を定義すると *Molchanov* の定理と同じ結論が成り立つ.

この定理は h_ω^L のグリーン関数を独立な部分系のグリーン関数の直和で近似することにより証明されるが, 最後の段階で次の評価が必要になる：

補題 3.3 任意の有界区間 J に対して

$$\mathbf{P}(\mathrm{Tr}\chi_J(h_\omega^L) \geq 2) \leq \pi^2 \|\rho\|^2 |J|^2 (L^d)^2 \ . \tag{62}$$

多次元のランダム・シュレーディンガー作用素 (9), (10) のスペクトル統計に対しても同様の結果を得ることが次の問題であったが, 最近解決された ([7]). その証明において最も重要な点は, 格子上の tight binding model に対しては初等的に得られた評価 (62) を, 全く異なる手法で連続系に対して示したことである.

参考文献

[1] Abrahams, E., Anderson, P.W., Licciardello, D.C., Ramakrishnan, T.V., Scaling theory of localization: absense of quantum diffusion in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, **42** (1979) 673–676

[2] Anderson, P.W., Absense of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.*, **109** (1958), 1492–1505.

[3] Bougerol, P., Lacroix, J., *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators*, Birkhäuser (1985)

[4] Carmona, R., Exponential localization in one dimensional disordered systems, *Duke Math. J.*, **49** (1982) 191–213

[5] Carmona, R., Random Schrödinger operators, in *École d'Été de Probabilité de Saint-Flour* Springer (1984) (Lecture Notes in Mathematics, **1180**)

[6] Carmona, R., Lacroix, J., *Spectral Theory of Random Scrödinger Operators*, Birkhäuser (1990)

[7] Combes, J.-M., Germinet, F., Klein, A., Poisson statistics for eigenvalues of continuum random Schrödinger operators, *arXiv[math-ph]:0807.045501*

[8] Delyon, F., Lévy, Y., Souillard, B., Anderson localization for multidimensional systems at large disorder or low energy, *Commun. Math, Phys.*, **100** (1985) 463–470

[9] Dirac, P.A.M., *The principles of quantum mechanics* 4th ed. (1958) （ディラック著, 朝永他訳「量子力学」岩波書店）

[10] Frölich, J., Martinelli, F., Scoppola, E., Spencer, T., Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model, *Commun. Math, Phys.*, **101** (1985) 21-46

[11] Frölich, J., Spencer, T., Absense of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy, *Commun. Math, Phys.*, **88** (1983) 151–184

[12] Germinet, F., de Bièvre, S., Dynamical localization for discrete and continuous random Schrödinger operators, *Commun. Math, Phys.*, **194** (1998) 323-341

[13] Gilbert, D.J., Pearson, D.B., On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **128** (1987) 30–56

[14] Gilbert, D.J., On subordinacy and analysis of the spectrum of Schrödinger operators with two singular endpoints, *Proc. Roy. Soc. Edinburh Ser A*, **112** (1989) 213–229

[15] Goldsheidt, I.Ya, Molchanov, S.A., Pastur, L.A., Pure point spectrum of stochastic one dimensional Schrödinger operators, *Func. Anal. Appl.*, **11** (1977) 1–10

[16] Jitomirskaya, S., Ergodic Schrödinger operators (on one foot), *Proc. Symp. Pure Math.*, **76.2** 613–647

[17] Kirsch, W., Martinelli, F., On the ergodic prperties of the spectrum of general random operators, *J. reine angew. Math.* **334** (1982) 141-156

[18] Kirsch, W., Random Schrödinger operators, in *Schrödinger Operarors* Springer (1989) (Lecture Notes in Physics **345**)

[19] Kirsch, W., An invitation to random Schrödinger operators, in *Panorama et Synthéses*, **25** (2008) 1–119, also available at arXiv:0709.3707 [math-ph]

[20] Kirsch, W., Metzger, B., The integrated density of states for random Schrödinger operators, *Proc. Symp. Pure Math.*, **76.2** (2007) 649–696

[21] Kotani, S., Ljapunov indices determine absolutely continuous spectra of stationary random one-dimensional Schrödinger operators, in *Stochastic Analysis* (Katata/Kyoto, 1982), North-Holland Math. Library, vol. 32, North-Holland (1984) 225-247

[22] Kotani, S., Lyapunov exponent and spectra for one-dimensional random Schrödinger operators, in *Contemp. Math.*, **50** (1986)

[23] Lang, R., *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators: A Genetic Introduction*, Springer (1991) (Lecture Notes in Mathematics **1498**)

[24] Minami, N., Random Schrödinger operators with a constant electric field, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A*, **56** (1992) 307–344

[25] Minami, N., Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model, *Commun. Math, Phys.*, **177** (1996) 709–725

[26] Molchanov, S.A., The structure of eigenfunctions of one dimensional unordered structures, *Math. U.S.S.R. Izvestija*, **12** (1978) 69–101

[27] Molchanov, S.A., The local structure of the spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator, *Commun. Math, Phys.*, **78** (1981) 429–446

[28] Neveu, J., Courte démonstration du théorème ergodique sur-additive, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilité et Statistique*, **19** (1983) 87–90

[29] Pastur, L.A., Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation, *Commun. Math, Phys.*, **75** (1980) 179–196

[30] Pastur, L.A., Figotin, A., *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators*, Springer (1992)

[31] Raghunathan, M., A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem, *Israel J. Math.*, **32** (1979) 356–362

[32] Ruell, D., A remark on bound states in potential scattering theory, *Nuovo Cimento*, **61A** (1969) 655–662

[33] Ruell, D., Ergodic theory of differentiable dynamical systems, *Publ. Math. IHES*, **50** (1979) 275–306

[34] Simon, B., Kotani theory for one dimensional stochastic Jacobi matrices, *Commun. Math, Phys.*, **89** (1983) 227–234

[35] Simon, B., Wolff, T., Singular continuous spectrum under rank one perturbations and localization for random Hamiltonians, *Commun. Pure Appl. Math.*, **39** (1986) 75–90

[36] Steele, M., Kingman's subadditive ergodic theorem, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilité et Statistique*, **25** (1989) 93–98

[37] Stollmann, P., *Caught by Disorder: Bound States in Random Media*, Birkhäuser (2001)

[38] Veselić, I., *Existence and rergularity prperties of the integrated density of states of random Schrödinger operators, Lecture Notes in Mathematics*, **1917** (2008) Springer

[39] Neumann, J.v., *Die mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (1932)（ノイマン著, 井上・広重・恒藤訳「量子力学の数学的基礎」みすず書房）

[40] Wiersma, D.S., Bartollini, P., Lagendijk, A., Righini, R., Localization of light in a disordered medium, *Nature*, **390** (1997) 671-673

[41] Yoshino, S., Okazaki, M., Numerical study of electron localization in Anderson model for disordered systems: spatial extension of wave function, *J. Phys. Soc. Japan*, **43** (1977) 415–423