解析学 IV 小テスト No. 5

1996 年 5 月 14 日
河東泰之

自分のノートを参照してよい.（本などは見ないこと.）

[1] 各自然数 n について $f_n(x)$ は，測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の実数値関数で，$f_n(x) \geq 0$ a.e. とする．この時，$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \geq 0$ a.e. であることを示せ.

[2] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数で，常に $f(x) > 0$ となるものとする．$\mathbf{R}^2$の部分集合 A を $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, 0 \leq y \leq f(x)\}$ で定めるとき，$\mu(A) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ であることを示せ．ただし，ここで左辺は A の $\mathbf{R}^2$における Lebesgue 測度，右辺は Riemann 積分の広義積分を表す．また，$\infty = \infty$ の場合もこの等式は成り立っていると考える.

[3] $\varepsilon \in (0, 1)$ が任意に与えられたとする．$[0, 1]$ の稠密な開集合 Uで，$\mu(U) = \varepsilon$となるものを構成せよ.

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです.