解析学 IV 小テスト No. 2

1996 年 4 月 23 日
河東泰之

自分のノートを参照してよい.（ただし，本は見ないこと.）

[1] Xを 3 つの要素 a, b, c からなる集合とする．X上の有限加法族をすべてあげよ.（答だけでなく，説明もつけること.）

[2] $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ とし，Xの部分集合全体からなる有限加法族 $\mathcal{F}$を考える．$A \in \mathcal{F}$に対し，

$$m(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$$

とおいたものは，有限加法的測度であるか，また，完全加法的測度であるか．それぞれ，簡単な理由を付けて答えよ.

[3] 有理数の集合 $\mathbf{Q}$ の部分集合で，$A = \bigcup_{j=1}^{n} ((\alpha_j, \beta_j) \cap \mathbf{Q})$, (disjoint union) の形のもの全体を $\mathcal{F}$とする．ただし，ここでα_jは$-\infty$ または，無理数，β_jは，∞ または無理数とする．また，$n = 0$ の時，$A = \varnothing$とする．上の形の A に対し，$m(A) = \sum_{j=1}^{n} ([\beta_j] - [\alpha_j])$ と定める.（ただしここで，[ ] は Gauss 記号で，$[\infty] = \infty$, $[-\infty] = -\infty$ とする．また実数α, βについて $\infty - \alpha = \beta - (-\infty) = \infty - (-\infty) = \infty$ と定めた．さらに，$\infty + \alpha = \infty + \infty = \infty$ である.）

(1) $\mathcal{F}$は $\mathbf{Q}$ 上の有限加法族であることを示せ.

(2) m は有限加法的測度か．簡単な理由を付けて答えよ.

(3) m は完全加法的測度か．簡単な理由を付けて答えよ.

[4] 授業で定義した，$\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 外測度μ^*に対し，次の量を求めよ.

(1) $\mu^*(\mathbf{Q})$

(2) $\mu^*((\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap [0, 1])$. ただし，$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ は，$\mathbf{Q}$ の $\mathbf{R}$ における補集合である.

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです.