解析学 IV 小テスト No. 9

1996 年 6 月 11 日
河東泰之

今週は，いつもとやり方が違います!!

答案用紙は 2 枚取って，[1] と，[2] 以降を別の紙に書いてください．最初の 15 分間はノートも何も 見ないで やってください．15 分たったところで，[1] の答案用紙だけを集めます．その後はいつものように，ノートを見てやってもらって結構です．そして，時間の最後に [2] 以降のほうの答案用紙を集めます．

[1] 次の定理のステートメントを書け．
(1) Beppo Levi の定理．(単調収束定理ともいう．)
(2) Fatou の lemma.
(3) Lebesgue の収束定理．

[2] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$T : X \to X$を次の 2 条件を満たす全単射とする．
(1) $A \subset X$が $A \in \mathcal{B}$を満たせば，$TA \in \mathcal{B}, T^{-1}A \in \mathcal{B}$.
(2) $A \in \mathcal{B}$について，$\mu(A) = \mu(TA)$.
$f(x)$ を X上の実数値可測可積分関数とするとき，$f(Tx)$ も X上の実数値可測可積分関数となって $\displaystyle\int_X f(x)\,d\mu = \int_X f(Tx)\,d\mu$ であることを示せ．

[3] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，$f(x)$ をその上の実数値可測可積分関数とする．任意の$\varepsilon > 0$ に対して，$E_\varepsilon = E(|f| > \varepsilon)$ とおく．この時，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon\mu(E_\varepsilon) = 0$ であることを示せ．

[4] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値有界可測関数で，次の条件を満たすものとする．

$g(x)$ が $\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数で，ある有界集合の外で 0 になるようなものであれば，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)\,dx = 0$.

この時，$\mathbf{R}$ 上で $f(x) = 0$ a.e. であることを示せ．

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．