解析学 IV 小テスト No. 7

5/28/1996
河東泰之

自分のノートを参照してよい.（本などは見ないこと.）

[1] $X = \mathbf{N}$ とし，$\mathcal{B}$を Xの部分集合すべての集合とする．この上の測度μを決めたとき，X上の，$\mathcal{B}$に関して可測な実数値可積分関数全体は $\mathbf{R}$-vector 空間になるが，この vector 空間が有限次元になるようなμの例を一つあげよ.（きちんと説明をつけること.）

[2] $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$ であることを示せ．ただし，左辺は Lebesgue 可測集合 $(1,\infty)$ 上の Lebesgue 可測関数$\dfrac{1}{x}$の，Lebesgue 測度に関する Lebesgue 積分である.（これが Riemann 積分に一致することはまだ示していないので，使わないこと.）

[3] $X = \mathbf{N}$ とし，$\mathcal{B}$を Xの部分集合すべての集合とする．この上の測度μを，$A \subset X$に対し，$\mu(A)$ を A の元の個数（∞ を含む）とおいて定める．すると，X上の $\mathcal{B}$に関して可測な実数値関数とは，実数列のことである.

この時，実数列 $\{a_n\}_n$が，X上の可測関数として可積分であることと，無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$が絶対収束することは同値であることを示せ.（授業でやった積分の定義に基づいて証明すること.）

[4] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$\mu(X) > 0$ とする．$f(x)$ は X上の実数値可測関数で，$f(x) > 0$ a.e. とする．この時，$\displaystyle\int_X f(x)\,dx > 0$ であることを示せ.

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです.