

2016 年解析学特別演習 I テスト (4)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。

このテストは、ノート持ち込み可で行います。電子機器の使用は不可です。

途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1] \mathbb{R} 上の連続可積分関数 $f(x)$ で、常に $f(x) > 0$ で $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ となるものの例を挙げよ。

[2] $f(x)$ を \mathbb{R} 上の Lebesgue 可測可積分関数とし、常に $f(x) \geq 0$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^n dx$ が存在して有限値となるための必要十分条件を求めよ。さらにそのときの、この極限値を求めよ。

[3] (X, \mathcal{B}, μ) を測度空間、 $f(x)$ をその上の実数値可測可積分関数とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $E_\varepsilon = E(|f| > \varepsilon)$ とおく。この時、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \mu(E_\varepsilon) = 0$ であることを示せ。

[4] $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$ を求めよ。

[5] (1) $\int_0^\infty (e^{-(2m-1)x} - e^{-2mx}) dx$ を求めよ。 ($m = 1, 2, \dots$ である。)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ を求めよ。