2016年解析学特別演習Iテスト(3)

河東泰之(かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟323号室(電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．

このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です．

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は1枚両面です．それに収まるように書いてください．

[1] $\mathbb{R}$ 上の関数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\chi_{[k,k+1]}(x)$ の，$\mathbb{R}$ 上の積分の値を定義に従って求めよ．測度は Lebesgue 測度である．

[2] $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ の値を定義に従って求めよ．測度は Lebesgue 測度である．

[3] $[0,\infty)$ 上の実数値 Lebesgue 可測関数 $f(x)$ で，任意の $c>0$ について $[0,c]$ 上 Lebesgue 可積分であって，$\displaystyle\lim_{c\to\infty}\int_0^c f(x)\,dx$ が実数値として存在するが，$[0,\infty)$ 上 Lebesgue 可積分ではないものの例を挙げよ．

[4] $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可測関数の列 $f_1(x), f_2(x), \ldots$ を考える．すべての k について $\mathbb{R}$ 上 $0\le f_k(x)<\infty$ であるとする．正の実数 $c_1, c_2, \ldots$ をうまく選べば $\mathbb{R}$ 上ほとんどいたるところ $\sum_{k=1}^{\infty}c_k f_k(x)$ が収束するようにできることを示せ．