

2016 年解析学特別演習 I テスト (12)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。

このテストは、ノート持ち込み可で行います。電子機器の使用は不可です。

途中の計算，説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1]  $f(x) = \chi_{[-1/2, 1/2]}(x)$  とおく。  $f * f * f$  を求めよ。

[2]  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  とおく。  $f * f$  を求めよ。

[3]  $f_1, f_2, f_3, \dots \in L^1(X) \cap L^2(X)$  とする。関数列  $\{f_k\}_k$  が  $L^1$  ノルムでも  $L^2$  ノルムでも Cauchy 列であるとき，  $f \in L^1(X) \cap L^2(X)$  が存在して  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_2 = 0$  となることを示せ。

[4]  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  とする。任意の  $\varepsilon > 0$  に対し，  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  で  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ ,  $\|f - g\|_2 < \varepsilon$  となるものが存在することを示せ。