2016 年解析学特別演習 I テスト (11) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は順に 25, 30, 20, 25 点です．平均点は 50 点，最高点は 100 点 (2 人) でした．

[1] $h_1(x) = \chi_{[-1,1]}(x)|x|^{-2/3}$, $h_2(x) = \chi_{[-1,1]}(x)|x|^{-1/3}$ とおきます．($x = 0$ での値は無視できます．) $h_1 \in L^1(\mathbb{R})$, $h_2 \in L^2(\mathbb{R})$ に注意します．有理数全体に番号をつけて $p_1, p_2, \dots$ とします．$f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} h_1(x - p_k)$ とおけばこれは $L^1(\mathbb{R})$ の中で収束し，$g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} h_2(x - p_k)$ とおけばこれは $L^2(\mathbb{R})$ の中で収束します．$f * g(p_k)$ を見ると，$p_k - p_1 = p_l$ とおけるので，$f(p_k - x)$ の無限和の中には $h_1(x - p_1)$ の正定数倍があり，$g(x)$ の無限和の中には $h_2(x - p_1)$ の正定数倍があります．$h_1(x - p_1)h_2(x - p_1)$ は可積分ではないので，$f * g(p_k)$ を定める積分は可積分ではありません．

[2] (1) y の関数として $f(x - y)$ が L^p 関数であり，$g(y)$ が L^q 関数なので Hölder の不等式より結論が出ます．

(2) Hölder の不等式と，$L^p(\mathbb{R})$ における平行移動の連続性から結論が出ます．

(3) $f_k \in C_0(\mathbb{R})$, $g_k \in C_0(\mathbb{R})$ を $\|f - f_k\|_p \to 0$, $\|g - g_k\|_q \to 0$ となるようにとると，Hölder の不等式より $\|f * g - f_k * g_k\|_\infty \le \|f\|_p \|g - g_k\|_q + \|f - f_k\|_p \|g_k\|_q$ なので，$\|f * g - f_k * g_k\|_\infty$ を得ます．$f_k * g_k$ はコンパクト台を持つのでこれから結論が導かれます．

[3] $\|f\|_\infty \le \sup |f(x)|$ は定義からすぐにわかります．$a < \sup |f(x)|$ とすると，$a < |f(x_0)|$ となる x_0 があります．$|f(x)|$ の連続性より，x_0 の近傍でも $a < |f(x)|$ となります．この近傍は正の測度を持つので，$a < \|f\|_\infty$ となり，結論が出ます．

[4] $f = 0$ の時は答えはもちろん 0 です．

そうでないとき，Hölder の不等式より答えは $\|f\|_p$ 以下ですが，この値を実際に取ることを示します．$c = \|f\|_p^{-p/q}$ とおき，$|g(x)| = c|f(x)|^{1/(q-1)}$, $f(x)g(x) \ge 0$ となるように可測関数 $g(x)$ が取れます．このとき計算により $\|g\|_q = 1$ がわかり，また $\displaystyle\int_X fg\,d\mu = c\int_X |f|^p\,d\mu = c\|f\|_p^p = \|f\|_p$ となるので，以上合わせて答えは $\|f\|_p$ です．