

2016 年解析学特別演習 I テスト (11)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。

このテストは、ノート持ち込み可で行います。電子機器の使用は不可です。

途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1] 次の条件すべてを満たす関数 f, g の例を挙げよ。

(1) $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(2) $g \in L^2(\mathbb{R})$.

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$ が可積分でない x が稠密に存在する。

[2] $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$ とする。さらに $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ とする。

(1) $f * g(x)$ がすべての x で定義されることを示せ。

(2) $f * g(x)$ が連続であることを示せ。

(3) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$ であることを示せ。

[3] $f \in C_0(\mathbb{R})$ とする。 $\|f\|_{\infty} = \sup |f(x)|$ であることを示せ。

[4] $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$ とする。 $f \in L^p(X)$ に対し、 $\sup_{g \in L^q(X), \|g\|_q \leq 1} \left| \int_X fg d\mu \right|$ を求めよ。