2016 年解析学特別演習 I テスト (1) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] 20 点, [2] 15 点 ×2, [3] 10 点 ×5 です．平均点は 62 点，最高点は 100 点 (2 人) でした.

[1] 直方体有限個の disjoint union K に対し，$m(K)$ は K に含まれる格子点 (x, y 座標がともに整数の点) の数となります．これより，$\Gamma(A)$ も A 内に含まれる格子点の数となることがわかります.

[2] (1) $\mu^*(\{x\}\times(n,n+1]) = 0$ が容易に分かるので，可算和を取って $\mu^*(\{x\}\times\mathbb{R}) = 0$ がわかり，さらに $\mu^*(\mathbb{Q}\times\mathbb{R}) = 0$ がわかります.

(2) $\mu^*([0,1]\times[0,1]) = 1$ であり，そこから可算個の点を除いているので $\mu^*(A) = 1$ です.

(1), (2) ともに Lebesgue 可測集合なのでこの Lebesgue 外測度は Lebesgue 測度の値にもなっています.

[3] (1) これは容易に分かります.

(2) $m(A\cup B)$ について，A, B がともに有限集合の場合とそれ以外の場合に分けてチェックすればわかります.

(3) $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}$ と書いて $m(\mathbb{N}) = \infty$ と $\sum_{n=1}^{\infty} m(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$ が異なるので完全加法的ではありません.

(4) $A = \bigcup_{n\in A}\{n\}$ という表示が外測度を与えるので，$\Gamma(A) = \sum_{n\in A}\frac{1}{n(n+1)}$ となります.

(5) (4) の表示からすべての $\mathbb{N}$ の部分集合が Γ-可測であることがわかります.