2016 年解析学特別演習 I テスト (7)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.
このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です.
途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください.

[1] $f(t)$ を $(0,\infty)$ 上の有界 Lebesgue 可測関数とする．複素数 z の虚部を正としたとき，この範囲で $F(z)=\displaystyle\int_0^\infty t^2 f(t)e^{itz}\,dt$ は z の正則関数を定めることを示せ.

[2] 実数 t に対し，$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ixt}}{1+x^2+x^4}\,dx$ は t の C^2 級関数であることを示せ.

[3] $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上のコンパクト台の連続関数，$g(x)$ を $\mathbb{R}$ 上のコンパクト台の C^∞ 級関数とする．$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y)\,dy$ はコンパクト台の C^∞ 級関数であることを示せ.

[4] $f(t)$ を $[0,1]$ 上の実数値有界 Lebesgue 可測関数とする．実数 x に対し $g(x)=\log\left(\displaystyle\int_0^1 e^{xf(t)}\,dt\right)$ とおく.
(1) $g(x)$ は無限回微分可能であることを示せ.
(2) 常に $g''(x)\geq 0$ であることを示せ.