2016 年解析学特別演習 I テスト (6)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.

このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です.

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください.

[1] $[0,\infty)$ 上の，$[0,\infty)$ に値を持つ連続関数 $f(x)$ を考える．Riemann 積分として $\lim_{C\to\infty}\int_0^C f(x)\,dx$ が存在するとき，$f$ は Lebesgue 積分の意味で $[0,\infty)$ 上可積分であることを示せ.

[2] 閉区間 $[0,1]$ 内の有理数に番号をつけて $p_1, p_2, \ldots$ とする．$x\in[0,1]$ の無限級数 $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}|x-p_k|^{-1/2}$ は $[0,1]$ 上ほとんどいたるところ収束することを示せ.

[3] $f(x)$ は $(0,\infty)$ 上の実数値 Lebesgue 可測関数で，$\int_0^\infty x|f(x)|\,dx<\infty$ であるとする.

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_0^\infty(\sin tx - tx)f(x)\,dx = 0$$

を示せ.

[4] $p(x)$ を $x$ の複素係数多項式とする．実数 $t$ に対して $f(t)=\int_{-\infty}^\infty p(x)e^{-x^2}e^{-ixt}\,dx$ とおけば，これは $t$ の $C^\infty$-級関数であることを示せ.