

2015 年解析学特別演習 I テスト (3)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。

このテストは、ノート持ち込み可で行います。電子機器の使用は不可です。

途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1] 講義で行った \mathbb{R}^n 上の有限加法族 \mathcal{F} とその上の有限加法的測度 m の構成において、 $n = 1$,

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0 \text{ の時}), \\ 1 & (\text{その他の時}). \end{cases}$$

とする。この m から講義で行ったように \mathbb{R} 上の外測度 Γ を構成したとき、 Γ はどのようなものか。具体的に記述せよ。

[2] $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき $f(\mathbb{R})$ は Lebesgue 可測集合であることを示せ。

[3] $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき、 \mathbb{R}^2 の部分集合 $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$ について、これが Lebesgue 可測集合であることを示し、その Lebesgue 測度を求めよ。

[4] 有理数全体に番号をつけて、 p_1, p_2, \dots とする。正の実数 r に対し、集合 A_r を

$$A_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(p_n - \frac{r}{2^n}, p_n + \frac{r}{2^n} \right)$$

とおく。

(1) A_r は Lebesgue 可測であることを示せ。

(2) A_r の Lebesgue 測度を $f(r)$ と書く。 r が正の実数全体を動くとき、 $f(r)$ の取る値の範囲を求めよ。