2015 年解析学特別演習 I テスト (2)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.
このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です.
途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください.

[1] 集合 $\{1,2,3,4\}$ の上の有限加法族はどのようなものがあるか．全て挙げよ.

[2] 講義で行った $\mathbb{R}^n$ 上の有限加法族 $\mathcal{F}$ とその上の有限加法的測度 m の構成において，$n=1$, $f_1(x)=[x]$ (x を超えない最大の整数) とする．講義で示した定理によってこの m は完全加法的であるが，このことを直接確認せよ.

[3] 講義で行った $\mathbb{R}^n$ 上の有限加法族 $\mathcal{F}$ とその上の有限加法的測度 m の構成において，$n=1$,

$$f_1(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0 \text{ の時}),\\ 1 & (\text{その他の時}).\end{cases}$$

とする．講義で示した定理によってこの m は完全加法的ではないが，$E_n\in\mathcal{F}$, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n\in\mathcal{F}$, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ は disjoint union であって，$\sum_{n=1}^\infty m(E_n)\ne m(\bigcup_{n=1}^\infty E_n)$ となるものの例を挙げよ.

[4] $\mathbb{R}$ 上の任意の部分集合 A に対し，A に含まれる有理数の個数を $\Gamma(A)$ とおく．(無限個の時は $\Gamma(A)=\infty$ とおく．) この Γ は $\mathbb{R}$ 上の外測度であることを示せ.

[5] $\mathbb{R}$ 上の外測度 Γ であって，$\Gamma(A)$ の取りうる値の集合が $[1,\infty)\cup\{0,\infty\}$ となるようなものの例を挙げよ.